교사용 지도서

고|등|학|교

미적분 I

신항균
이광연
박세원
신범영
이계세
김정화
박문환
윤정호
박상의
서원호
전제동
이동흔

(주)지학사

고 등 학 교

미적분 I

교사용 지도서

(주)지학사

머리말

현대 과학 문명은 미처 예상하지 못한 분야까지 급속도로 발전하고 있으며, 그 발전의 중심에는 언제나 수학이 자리해 왔습니다. 이러한 상황 가운데 수학 교육의 중요성은 더욱 부각되고 있습니다. 하지만 수학은 일반적으로 어려운 교과로 인식되기 때문에 하고자 하는 의욕이 있음에도 효율적인 학습이 이루어지지 않는 경향이 많습니다. 그 이유는 여러 가지가 있지만 다음과 같이 두 가지로 요약할 수 있습니다.

첫째, 방법론의 문제입니다. 수학은 어느 교과보다도 체계적이고 논리적이기 때문에 단계적인 학습을 통하여 단원 상호 간의 연계적 이해가 이루어져야 합니다. 또한 수학은 누적적인 학문입니다. 오늘날의 수학은 오래전부터 발견되고 발전해 온 수학을 기초로 이루어져 있으므로 이를 무시하면 수학 학습은 마치 사상누각이 되는 것입니다. 따라서 수학은 반드시 기초부터 시작해야 하고, 이를 바탕으로 체계적이고 논리적으로 확장해 나가야 합니다. 그러나 수학을 학습하는 데 이와 같은 수학의 특징을 중요하지 않게 여기는 경향이 있습니다.

둘째, 응용력의 문제입니다. 이미 언급했듯이 수학은 논리적인 전개를 바탕으로 합니다. 그러므로 체계적인 이해를 전제로 하지 않은 단순한 암기와 기계적인 응용은 심도 있는 수학 학습에 한계를 불러옵니다. 즉, 어떠한 문제가 주어졌을 때, 문제의 성격과 해결 과정에 대한 철저한 사고 없이 문제 유형과 공식을 대응하여 해결하려는 식의 요령은 오히려 다양한 문제에 적용하는 데 한계를 가져오고 수학 학습을 보다 어렵게 느끼게 합니다.

본 교사용 지도서는 위와 같은 점들을 고려하여 단원 간의 연계와 원리의 이해 및 적용에 중점을 두고 편찬하였습니다. 그리고 선생님께서 학생들에게 수학을 지도할 때, 학생들이 보다 흥미와 관심을 가지고 쉽게 이해할 수 있도록 교과서 체계에 맞추어 구성하였습니다. 아울러 교과서의 활용에 도움이 되는 사항들을 함께 수록하였으며, 구체적인 활용 방법은 따로 설명하였습니다.

교육 현장에 계신 선생님께서 본 교사용 지도서를 효율적으로 사용하여 보다 알찬 수학 교육의 결실을 거두기 바랍니다.

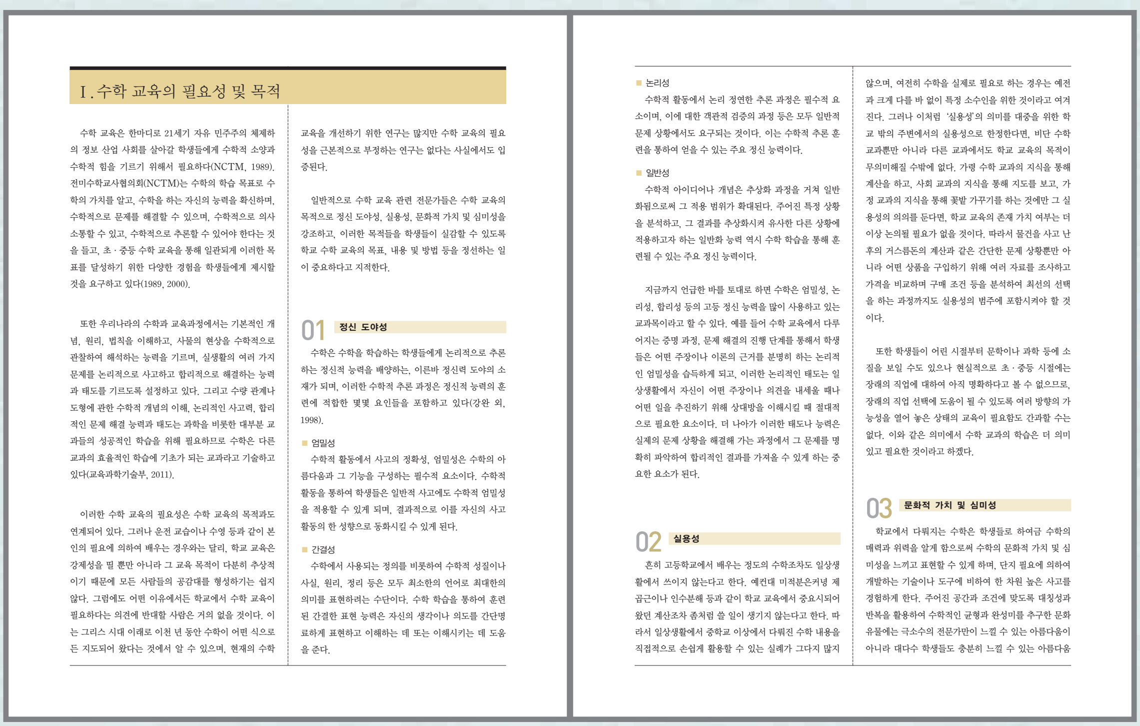
지은이 씀

구성과 특징

교사용 지도서는 크게 총론과 각론으로 나누어, 교사들의 전문성 신장에 도움을 줄 수 있는 내용과 교과서의 각 단원 지도에 유용한 자료들을 제공하였습니다.

총론

수학 교육의 필요성 및 목적, 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 이해, 수학 교과서의 개발 동향, 수학적 문제 해결, 수학과 평가의 특징 및 방법, 좋은 수업의 의미, 수학과 수업 평가 등을 설명하였고, 교과서의 구성과 연간 지도 계획안을 제시하였습니다.



Ⅰ. 수학 교육의 필요성 및 목적

수학 교육은 한마디로 21세기 자유 민주주의 체제하의 정보 산업 사회를 살아갈 학생들에게 수학적 소양과 수학적 힘을 기르기 위해서 필요하다(NCTM, 1989). 전미수학교사협의회(NCTM)는 수학의 학습 목표로 수학의 가치를 알고, 수학을 하는 자신의 능력을 확신하며, 수학적으로 문제를 해결할 수 있으며, 수학적으로 의사소통할 수 있고, 수학적으로 추론할 수 있어야 한다는 것을 들고, 초 · 중등 수학 교육을 통해 일관되게 이러한 목표를 달성하기 위한 다양한 경험을 학생들에게 제시할 것을 요구하고 있다(1989, 2000).

또한 우리나라의 수학과 교육과정에서는 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하고, 사물의 현상을 수학적으로 관찰하여 해석하는 능력을 기르며, 실생활의 여러 가지 문제를 논리적으로 사고하고 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르도록 설정하고 있다. 그리고 수량 관계나 도형에 관한 수학적 개념의 이해, 논리적인 사고력, 합리적인 문제 해결 능력과 태도는 과학을 비롯한 대부분 교과들의 성공적인 학습을 위해 필요하므로 수학은 다른 교과의 효율적인 학습에 기초가 되는 교과라고 기술하고 있다(교육과학기술부, 2011).

이러한 수학 교육의 필요성은 수학 교육의 목적과도 연계되어 있다. 그러나 운전 교습이나 수영 등과 같이 본인의 필요에 의하여 배우는 경우와는 달리, 학교 교육은 강제성을 띨 뿐만 아니라 그 교육 목적이 다분히 추상적이기 때문에 모든 사람들의 공감대를 형성하기는 쉽지 않다. 그럼에도 어떤 이유에서든 학교에서 수학 교육이 필요하다는 의견에 반대할 사람은 거의 없을 것이다. 이는 그리스 시대 이래로 이천 년 동안 수학이 어떤 식으로든 지도되어 왔다는 것에서 알 수 있으며, 현재의 수학 교육을 개선하기 위한 연구는 많지만 수학 교육의 필요성을 근본적으로 부정하는 연구는 없다는 사실에서도 입증된다.

일반적으로 수학 교육 관련 전문가들은 수학 교육의 목적으로 정신 도야성, 실용성, 문화적 가치 및 심미성을 강조하고, 이러한 목적들을 학생들이 실감할 수 있도록 학교 수학 교육의 목표, 내용 및 방법 등을 정선하는 일이 중요하다고 지적한다.

01 정신 도야성

수학은 수학을 학습하는 학생들에게 논리적으로 추론하는 정신적 능력을 배양하는, 이른바 정신력 도야의 소재가 되며, 이러한 수학적 추론 과정은 정신적 능력의 훈련에 적합한 몇몇 요인들을 포함하고 있다(강완 외, 1998).

■ 엄밀성
수학적 활동에서 사고의 정확성, 엄밀성은 수학의 아름다움과 그 기능을 구성하는 필수적 요소이다. 수학적 활동을 통하여 학생들은 일반적 사고에도 수학적 엄밀성을 적용할 수 있게 되며, 결과적으로 이를 자신의 사고 활동의 한 성향으로 동화시킬 수 있게 된다.

■ 간결성
수학에서 사용되는 정의를 비롯하여 수학적 성질이나 사실, 원리, 정리 등은 모두 최소한의 언어로 최대한의 의미를 표현하려는 수단이다. 수학 학습을 통하여 훈련된 간결한 표현 능력은 자신의 생각이나 의도를 간단명료하게 표현하고 이해하는 데 또는 이해시키는 데 도움을 준다.

■ 논리성
수학적 활동에서 논리 정연한 추론 과정은 필수적 요소이며, 이에 대한 객관적 검증의 과정 등은 모두 일반적 문제 상황에서도 요구되는 것이다. 이는 수학적 추론 훈련을 통하여 얻을 수 있는 주요 정신 능력이다.

■ 일반성
수학적 아이디어나 개념은 추상화 과정을 거쳐 일반화됨으로써 그 적용 범위가 확대된다. 주어진 특정 상황을 분석하고, 그 결과를 추상화시켜 유사한 다른 상황에 적용하고자 하는 일반화 능력 역시 수학 학습을 통해 훈련될 수 있는 주요 정신 능력이다.

지금까지 언급한 바를 토대로 하면 수학은 엄밀성, 논리성, 합리성 등의 고등 정신 능력을 많이 사용하고 있는 교과목이라고 할 수 있다. 예를 들어 수학 교육에서 다루어지는 증명 과정, 문제 해결의 진행 단계를 통해서 학생들은 어떤 주장이나 이론의 근거를 분명히 하는 논리적인 엄밀성을 습득하게 되고, 이러한 논리적인 태도는 일상생활에서 자신이 어떤 주장이나 의견을 내세울 때나 어떤 일을 추진하기 위해 상대방을 이해시킬 때 절대적으로 필요한 요소이다. 더 나아가 이러한 태도나 능력은 실제의 문제 상황을 해결해 가는 과정에서 그 문제를 명확히 파악하여 합리적인 결과를 가져올 수 있게 하는 중요한 요소가 된다.

02 실용성

흔히 고등학교에서 배우는 정도의 수학조차도 일상생활에서 쓰이지 않는다고 한다. 예컨대 미적분은커녕 제곱근이나 인수분해 등과 같이 학교 교육에서 중요시되어 왔던 계산조차 좀처럼 쓸 일이 생기지 않는다고 한다. 따라서 일상생활에서 중학교 이상에서 다뤄진 수학 내용을 직접적으로 손쉽게 활용할 수 있는 실례가 그다지 많지 않으며, 여전히 수학을 실제로 필요로 하는 경우는 예전과 크게 다를 바 없이 특정 소수인을 위한 것이라고 여겨진다. 그러나 이처럼 '실용성'의 의미를 대중을 위한 학교 밖의 주변에서의 실용성으로 한정한다면, 비단 수학 교과뿐만 아니라 다른 교과에서도 학교 교육의 목적이 무의미해질 수밖에 없다. 가령 수학 교과의 지식을 통해 계산을 하고, 사회 교과의 지식을 통해 지도를 보고, 가정 교과의 지식을 통해 꽃밭 가꾸기를 하는 것에만 그 실용성의 의의를 둔다면, 학교 교육의 존재 가치 여부는 더 이상 논의될 필요가 없을 것이다. 따라서 물건을 사고 난 후의 거스름돈의 계산과 같은 간단한 문제 상황뿐만 아니라 어떤 상품을 구입하기 위해 여러 자료를 조사하고 가격을 비교하며 구매 조건 등을 분석하여 최선의 선택을 하는 과정까지도 실용성의 범주에 포함시켜야 할 것이다.

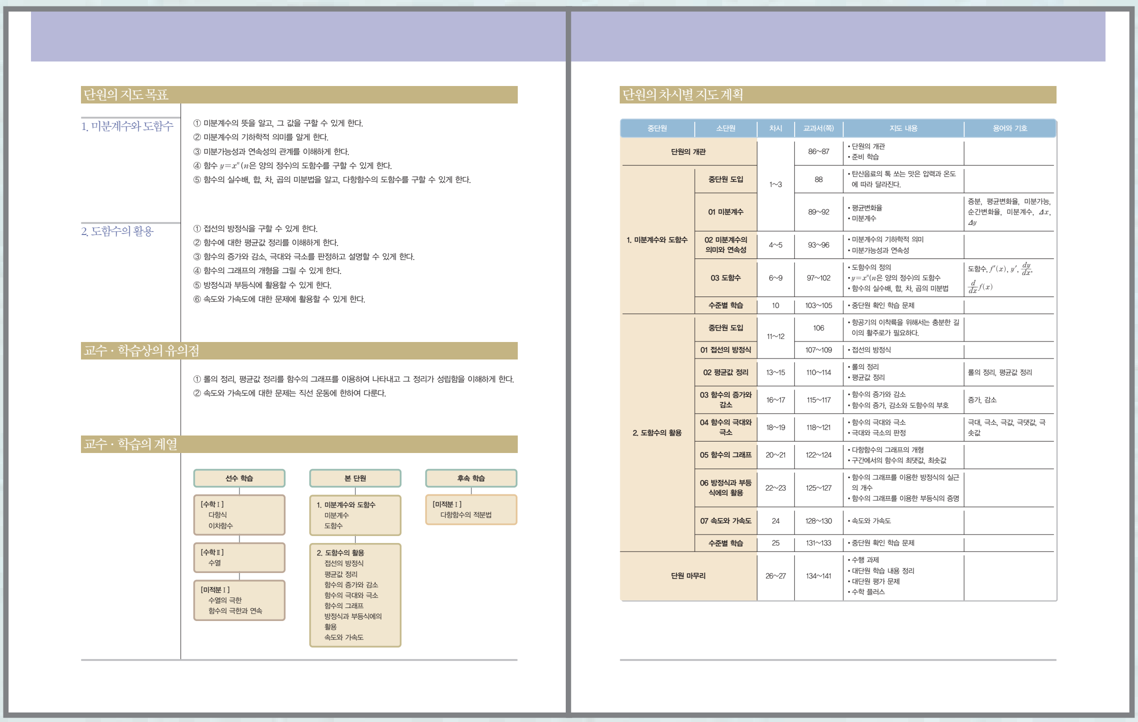
또한 학생들이 어린 시절부터 문학이나 과학 등에 소질을 보일 수도 있으나 현실적으로 초 · 중등 시절에는 장래의 직업에 대하여 아직 명확하다고 볼 수 없으므로, 장래의 직업 선택에 도움이 될 수 있도록 여러 방향의 가능성을 열어 놓은 상태의 교육이 필요함도 간과할 수는 없다. 이와 같은 의미에서 수학 교과의 학습은 더 의미 있고 필요한 것이라고 하겠다.

03 문화적 가치 및 심미성

학교에서 다뤄지는 수학은 학생들로 하여금 수학의 매력과 위력을 알게 함으로써 수학의 문화적 가치 및 심미성을 느끼고 표현할 수 있게 하며, 단지 필요에 의하여 개발하는 기술이나 도구에 비하여 한 차원 높은 사고를 경험하게 한다. 주어진 공간과 조건에 맞도록 대칭성과 반복을 활용하여 수학적인 균형과 완성미를 추구한 문화 유물에는 극소수의 전문가만이 느낄 수 있는 아름다움이 아니라 대다수 학생들도 충분히 느낄 수 있는 아름다움

각론

단원별 지도에 참고할 수 있는 지도 목표, 교수 · 학습상의 유의점, 지도 계획, 이론적 배경, 차시별 교수 · 학습 과정안(예시), 교과서 내용의 해설과 문제 풀이 및 교과서 내용 지도 시 유용한 자료들을 제시하였습니다.



단원의 지도 목표

1. 미분계수와 도함수

① 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있게 한다.
② 미분계수의 기하학적 의미를 알게 한다.
③ 미분가능성과 연속성의 관계를 이해하게 한다.
④ 함수 $y=x^n$ (n은 양의 정수)의 도함수를 구할 수 있게 한다.
⑤ 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있게 한다.

2. 도함수의 활용

① 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.
② 함수에 대한 평균값 정리를 이해하게 한다.
③ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있게 한다.
④ 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있게 한다.
⑤ 방정식과 부등식에 활용할 수 있게 한다.
⑥ 속도와 가속도에 대한 문제에 활용할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

① 롤의 정리, 평균값 정리를 함수의 그래프를 이용하여 나타내고 그 정리가 성립함을 이해하게 한다.
② 속도와 가속도에 대한 문제는 직선 운동에 한하여 다룬다.

교수 · 학습의 계열

선수 학습	본 단원	후속 학습
[수학 I] 다항식, 이차함수	1. 미분계수와 도함수: 미분계수, 도함수	[미적분 I] 다항함수의 적분법
[수학 II] 수열	2. 도함수의 활용: 접선의 방정식, 평균값 정리, 함수의 증가와 감소, 함수의 극대와 극소, 함수의 그래프, 방정식과 부등식에의 활용, 속도와 가속도	
[미적분 I] 수열의 극한, 함수의 극한과 연속		

단원의 차시별 지도 계획

중단원	소단원	차시	교과서(쪽)	지도 내용	용어와 기호
단원의 개관		1~3	86~87	• 단원의 개관 • 준비 학습	
1. 미분계수와 도함수	중단원 도입		88	• 탄산음료의 톡 쏘는 맛은 압력과 온도에 따라 달라진다.	
	01 미분계수		89~92	• 평균변화율 • 미분계수	증분, 평균변화율, 미분가능, 순간변화율, 미분계수, Δx, Δy
	02 미분계수의 의미와 연속성	4~5	93~96	• 미분계수의 기하학적 의미 • 미분가능성과 연속성	
	03 도함수	6~9	97~102	• 도함수의 정의 • $y=x^n$(n은 양의 정수)의 도함수 • 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법	도함수, $f'(x)$, y', $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x)$
	수준별 학습	10	103~105	• 중단원 확인 학습 문제	
2. 도함수의 활용	중단원 도입	11~12	106	• 항공기의 이착륙을 위해서는 충분한 길이의 활주로가 필요하다.	
	01 접선의 방정식		107~109	• 접선의 방정식	
	02 평균값 정리	13~15	110~114	• 롤의 정리 • 평균값 정리	롤의 정리, 평균값 정리
	03 함수의 증가와 감소	16~17	115~117	• 함수의 증가와 감소 • 함수의 증가, 감소와 도함수의 부호	증가, 감소
	04 함수의 극대와 극소	18~19	118~121	• 함수의 극대와 극소 • 극대와 극소의 판정	극대, 극소, 극값, 극댓값, 극솟값
	05 함수의 그래프	20~21	122~124	• 다항함수의 그래프의 개형 • 구간에서의 함수의 최댓값, 최솟값	
	06 방정식과 부등식에의 활용	22~23	125~127	• 함수의 그래프를 이용한 방정식의 실근의 개수 • 함수의 그래프를 이용한 부등식의 증명	
	07 속도와 가속도	24	128~130	• 속도와 가속도	
	수준별 학습	25	131~133	• 중단원 확인 학습 문제	
단원 마무리		26~27	134~141	• 수행 과제 • 대단원 학습 내용 정리 • 대단원 평가 문제 • 수학 플러스	

단원의 지도 목표

교육과정에 명시된 대단원의 지도 목표를 중단원별로 제시하였습니다.

교수 · 학습상의 유의점

대단원의 지도에 있어서 유의해야 할 사항 중 교육과정에 명시된 내용을 설명하였습니다.

교수 · 학습의 계열

단원과 관련하여 선수 학습과 후속 학습의 연계성을 제시하였습니다.

단원의 차시별 지도 계획

중단원과 소단원별 교과서 쪽수, 지도 내용, 교육과정에 명시된 용어와 기호 등을 쉽게 알아볼 수 있도록 표로 정리하였습니다.

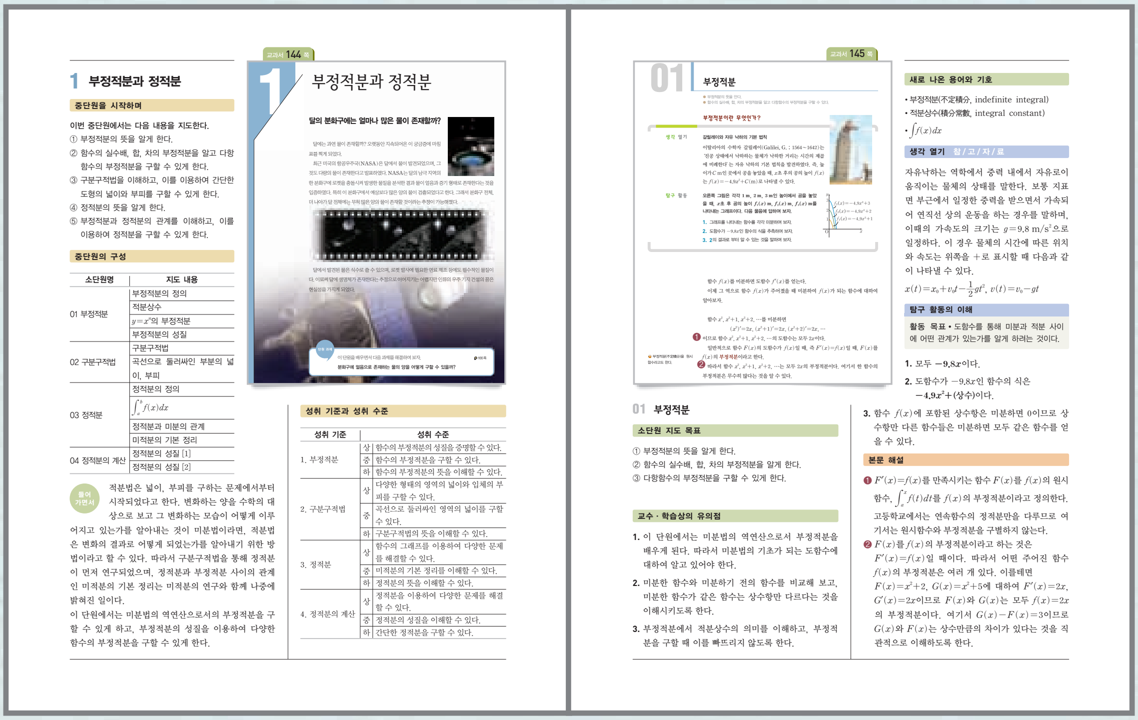
단원의 이론적 배경

단원의 이론적 배경과 이론이 발전되어 온 수학사적 배경을 설명하였습니다.

차시별 교수 · 학습 과정안(예시)

두 개의 차시에 해당하는 교수 · 학습 과정안을 예로 제시하였습니다.

구성과 특징



중단원을 시작하며

교육과정에 명시된 중단원의 지도 목표를 제시하였습니다.

중단원의 구성

중단원의 소단원명과 각 소단원의 지도 내용을 제시하였습니다.

들어가면서

중단원 도입에 소개된 실생활 소재와 단원과의 관련성을 설명하였습니다.

성취 기준과 성취 수준

교육과정에 제시된 단원의 성취 기준 및 상, 중, 하 수준별 성취 수준을 제시하였습니다.

소단원 지도 목표

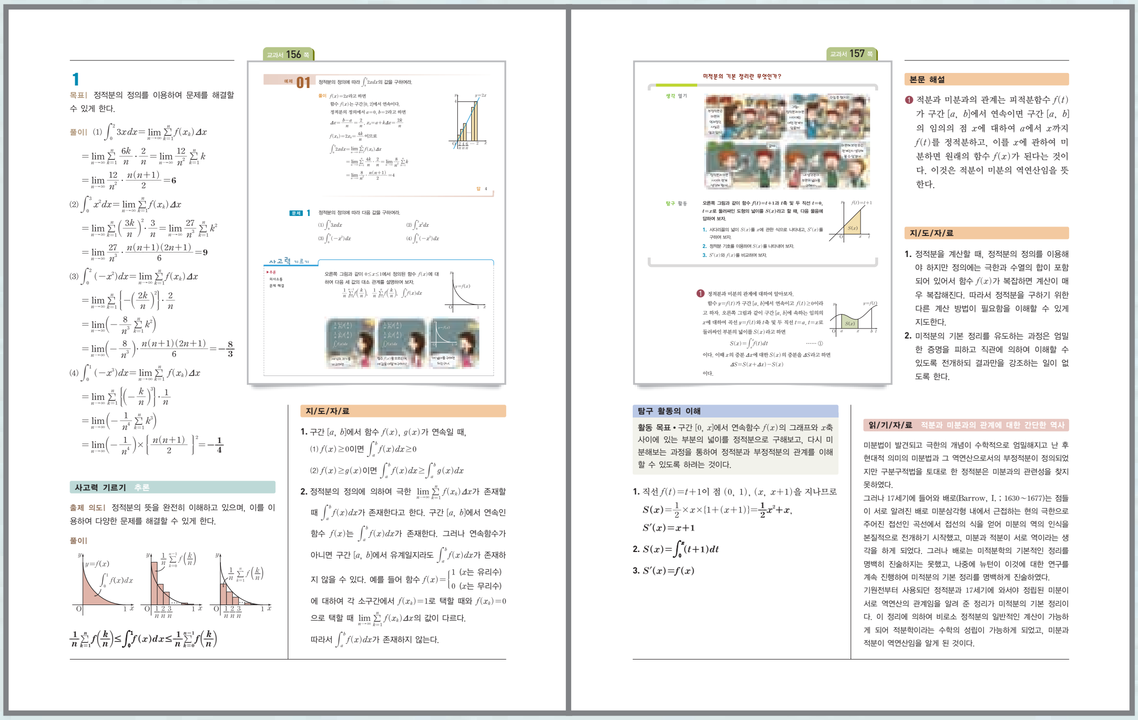
소단원별로 세부적이고 구체적인 지도 목표를 제시하였습니다.

교수 · 학습상의 유의점

소단원의 지도에 있어서 특별히 유의해야 할 사항을 정리하였습니다.

새로 나온 용어와 기호

소단원에서 새로 배우게 될 교육과정에 명시된 용어와 기호를 제시하였습니다.



생각 열기 참고 자료
생각 열기와 관련된 내용에 대한 충분한 설명을 제시하였습니다.

탐구 활동의 이해
탐구 활동의 목표와 자세한 풀이를 제시하였습니다.

본문 해설
교과서에 제시된 학습 내용을 해설하고, 보다 자세한 설명을 덧붙였습니다.

지도 자료
내용 지도 시 필요한 보충 설명이나 기호에 대한 설명을 제시하였습니다.

읽기 자료
수학사, 생활 속 수학 등 각종 읽기 자료를 제시하였습니다.

문제의 해설
교과서 본문에 있는 모든 문제의 출제 의도 및 지도 목표와 자세한 풀이를 제시하였습니다.

수행 과제
수행 과제의 출제 의도와 구체적인 예시 답안을 제시하였습니다.

대단원 학습 내용 정리
단원에서 배운 내용을 요약 · 정리하였습니다.

대단원 평가 문제
단원 마무리에 나온 대단원 평가 문제의 지도 목표 및 풀이를 제시하였습니다.

수학 플러스
단원과 관련된 수학, 과학, 공학, 예술, 문학, 실생활, 역사 등의 이야기를 소개하였습니다.

그들과 이야기를 나누며
가장 크게 깨달은 것은 자기가 진정으로
하고 싶어하는 것이 무엇인지 깨닫는다면
그 일을 미래의 어느 날로 미루지 말고,
또 그 일을 할 수 없는 이유들을 찾지 말고
'바로 지금' 시작해야 한다는 것이다.
흘러가는 시간은 언젠가 이룰 꿈을 위해
마냥 기다려주지 않으니까.

– 용서해의 《삶의 마지막 축제》 중에서 –

차례

총론

Ⅰ. 수학 교육의 필요성 및 목적	10
Ⅱ. 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 이해	13
Ⅲ. 수학 교과서의 개발 동향	27
Ⅳ. 수학적 문제 해결	32
Ⅴ. 수학과 평가의 특징 및 방법	37
Ⅵ. 좋은 수업의 의미	50
Ⅶ. 수학과 수업 평가	55
Ⅷ. 교과서의 구성	62
Ⅸ. 연간 지도 계획안	64
Ⅹ. 참고 문헌	65

Ⅰ. 수학 교육의 필요성 및 목적

수학 교육은 한마디로 21세기 자유 민주주의 체제하의 정보 산업 사회를 살아갈 학생들에게 수학적 소양과 수학적 힘을 기르기 위해서 필요하다(NCTM, 1989). 전미수학교사협의회(NCTM)는 수학의 학습 목표로 수학의 가치를 알고, 수학을 하는 자신의 능력을 확신하며, 수학적으로 문제를 해결할 수 있으며, 수학적으로 의사소통할 수 있고, 수학적으로 추론할 수 있어야 한다는 것을 들고, 초·중등 수학 교육을 통해 일관되게 이러한 목표를 달성하기 위한 다양한 경험을 학생들에게 제시할 것을 요구하고 있다(1989, 2000).

또한 우리나라의 수학과 교육과정에서는 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하고, 사물의 현상을 수학적으로 관찰하여 해석하는 능력을 기르며, 실생활의 여러 가지 문제를 논리적으로 사고하고 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르도록 설정하고 있다. 그리고 수량 관계나 도형에 관한 수학적 개념의 이해, 논리적인 사고력, 합리적인 문제 해결 능력과 태도는 과학을 비롯한 대부분 교과들의 성공적인 학습을 위해 필요하므로 수학은 다른 교과의 효율적인 학습에 기초가 되는 교과라고 기술하고 있다(교육과학기술부, 2011).

이러한 수학 교육의 필요성은 수학 교육의 목적과도 연계되어 있다. 그러나 운전 교습이나 수영 등과 같이 본인의 필요에 의하여 배우는 경우와는 달리, 학교 교육은 강제성을 띨 뿐만 아니라 그 교육 목적이 다분히 추상적이기 때문에 모든 사람들의 공감대를 형성하기는 쉽지 않다. 그럼에도 어떤 이유에서든 학교에서 수학 교육이 필요하다는 의견에 반대할 사람은 거의 없을 것이다. 이는 그리스 시대 이래로 이천 년 동안 수학이 어떤 식으로든 지도되어 왔다는 것에서 알 수 있으며, 현재의 수학 교육을 개선하기 위한 연구는 많지만 수학 교육의 필요성을 근본적으로 부정하는 연구는 없다는 사실에서도 입증된다.

일반적으로 수학 교육 관련 전문가들은 수학 교육의 목적으로 정신 도야성, 실용성, 문화적 가치 및 심미성을 강조하고, 이러한 목적들을 학생들이 실감할 수 있도록 학교 수학 교육의 목표, 내용 및 방법 등을 정선하는 일이 중요하다고 지적한다.

01 정신 도야성

수학은 수학을 학습하는 학생들에게 논리적으로 추론하는 정신적 능력을 배양하는, 이른바 정신력 도야의 소재가 되며, 이러한 수학적 추론 과정은 정신적 능력의 훈련에 적합한 몇몇 요인들을 포함하고 있다(강완 외, 1998).

■ 엄밀성

수학적 활동에서 사고의 정확성, 엄밀성은 수학의 아름다움과 그 기능을 구성하는 필수적 요소이다. 수학적 활동을 통하여 학생들은 일반적 사고에도 수학적 엄밀성을 적용할 수 있게 되며, 결과적으로 이를 자신의 사고 활동의 한 성향으로 동화시킬 수 있게 된다.

■ 간결성

수학에서 사용되는 정의를 비롯하여 수학적 성질이나 사실, 원리, 정리 등은 모두 최소한의 언어로 최대한의 의미를 표현하려는 수단이다. 수학 학습을 통하여 훈련된 간결한 표현 능력은 자신의 생각이나 의도를 간단명료하게 표현하고 이해하는 데 또는 이해시키는 데 도움을 준다.

■ 논리성

수학적 활동에서 논리 정연한 추론 과정은 필수적 요소이며, 이에 대한 객관적 검증의 과정 등은 모두 일반적 문제 상황에서도 요구되는 것이다. 이는 수학적 추론 훈련을 통하여 얻을 수 있는 주요 정신 능력이다.

■ 일반성

수학적 아이디어나 개념은 추상화 과정을 거쳐 일반화됨으로써 그 적용 범위가 확대된다. 주어진 특정 상황을 분석하고, 그 결과를 추상화시켜 유사한 다른 상황에 적용하고자 하는 일반화 능력 역시 수학 학습을 통해 훈련될 수 있는 주요 정신 능력이다.

지금까지 언급한 바를 토대로 하면 수학은 엄밀성, 논리성, 합리성 등의 고등 정신 능력을 많이 사용하고 있는 교과목이라고 할 수 있다. 예를 들어 수학 교육에서 다루어지는 증명 과정, 문제 해결의 진행 단계를 통해서 학생들은 어떤 주장이나 이론의 근거를 분명히 하는 논리적인 엄밀성을 습득하게 되고, 이러한 논리적인 태도는 일상생활에서 자신이 어떤 주장이나 의견을 내세울 때나 어떤 일을 추진하기 위해 상대방을 이해시킬 때 절대적으로 필요한 요소이다. 더 나아가 이러한 태도나 능력은 실제의 문제 상황을 해결해 가는 과정에서 그 문제를 명확히 파악하여 합리적인 결과를 가져올 수 있게 하는 중요한 요소가 된다.

02 실용성

흔히 고등학교에서 배우는 정도의 수학조차도 일상생활에서 쓰이지 않는다고 한다. 예컨대 미적분은커녕 제곱근이나 인수분해 등과 같이 학교 교육에서 중요시되어 왔던 계산조차 좀처럼 쓸 일이 생기지 않는다고 한다. 따라서 일상생활에서 중학교 이상에서 다뤄진 수학 내용을 직접적으로 손쉽게 활용할 수 있는 실례가 그다지 많지 않으며, 여전히 수학을 실제로 필요로 하는 경우는 예전과 크게 다를 바 없이 특정 소수인을 위한 것이라고 여겨진다. 그러나 이처럼 '실용성'의 의미를 대중을 위한 학교 밖의 주변에서의 실용성으로 한정한다면, 비단 수학 교과뿐만 아니라 다른 교과에서도 학교 교육의 목적이 무의미해질 수밖에 없다. 가령 수학 교과의 지식을 통해 계산을 하고, 사회 교과의 지식을 통해 지도를 보고, 가정 교과의 지식을 통해 꽃밭 가꾸기를 하는 것에만 그 실용성의 의의를 둔다면, 학교 교육의 존재 가치 여부는 더 이상 논의될 필요가 없을 것이다. 따라서 물건을 사고 난 후의 거스름돈의 계산과 같은 간단한 문제 상황뿐만 아니라 어떤 상품을 구입하기 위해 여러 자료를 조사하고 가격을 비교하며 구매 조건 등을 분석하여 최선의 선택을 하는 과정까지도 실용성의 범주에 포함시켜야 할 것이다.

또한 학생들이 어린 시절부터 문학이나 과학 등에 소질을 보일 수도 있으나 현실적으로 초·중등 시절에는 장래의 직업에 대하여 아직 명확하다고 볼 수 없으므로, 장래의 직업 선택에 도움이 될 수 있도록 여러 방향의 가능성을 열어 놓은 상태의 교육이 필요함도 간과할 수는 없다. 이와 같은 의미에서 수학 교과의 학습은 더 의미 있고 필요한 것이라고 하겠다.

03 문화적 가치 및 심미성

학교에서 다뤄지는 수학은 학생들로 하여금 수학의 매력과 위력을 알게 함으로써 수학의 문화적 가치 및 심미성을 느끼고 표현할 수 있게 하며, 단지 필요에 의하여 개발하는 기술이나 도구에 비하여 한 차원 높은 사고를 경험하게 한다. 주어진 공간과 조건에 맞도록 대칭성과 반복을 활용하여 수학적인 균형과 완성미를 추구한 문화 유물에는 극소수의 전문가만이 느낄 수 있는 아름다움이 아니라 대다수 학생들도 충분히 느낄 수 있는 아름다움

이 들어 있으며, 매우 간단한 수학적 원리를 활용하여 흥미진진한 게임을 하는 예에서도 그 심미적 가치를 쉽게 찾을 수 있다. 또한 수학의 아름다움이나 매력은 미적분의 기본 정리에서부터 신라 시대의 술병에 이르기까지 다양한 대상과 수준에서 발견될 수 있다. 이와 같은 풍부한 자료와 유연한 해석을 통하여 문화적 가치, 수학 고유의 심미성을 적절한 수준에서 확인하는 경험은 고등학교를 떠남과 동시에 수학과 멀어지는 대부분의 학생들에게 반드시 필요하다.

수학 교육에서 놓치지 말아야 하는 것은 모든 건전한 시민을 위한 공통적으로 기본적이면서도 필수적인 수학 내용이 무엇인가를 분명히 하는 것이다. 따라서 수학 교육은 모든 학생들에게 꼭 필요한 내용이 무엇인지 명확히 정할 필요가 있으며 그것이 다양한 상황과 측면에 적용되면서 철저히 그리고 깊이 있게 이해되도록 돕는 것이 필요할 것이다. 궁극적으로 교육의 목적은 학생의 잠재력을 계발하고, 건전한 사회인으로서의 역할을 수행하도록 돕는 데 있다. 다른 교과 교육이 그러하듯이 수학도 현대 사회와 미래 사회를 살아갈 건전한 시민으로서 그 사회를 지탱하는 문명적, 문화적 기저 중에서 수학을 기반으로 하는 것에 대하여 수학적으로 이해하는 눈을 기르기 위해 배우는 것이다.

결국 수학을 가르쳐야 하는 이유는 수학의 내용이 인간과 환경에 관한 각종 현상을 보는 안목과 수단을 제공해 주기 때문이다. 수학적 안목의 고양이라는 것은 수학의 실용성과도 연결될 수 있지만 그보다는 경제 · 사회 · 문화 등 제 분야에 녹아 있는 수학적 현상이나 원리 · 모델 등을 파악하여 이들 분야를 더욱 깊이 있고 창의적인 방법으로 이해할 수 있도록 하는 것을 의미한다. 또한 수학은 어떤 문제를 여러 가지 수학적 방법으로 해결하게 함으로써 문제 해결의 지혜를 기르고, 한 현상에 담긴 수학적 질서를 이해하기 위해 배우며, 사물의 법칙과 질서에 대한 수학적 이해력을 기르기 위해 배운다고도 할 수 있다. 즉, 조각상의 무게중심, 물건 구매, 유전자의 배열, 황금 비율, 투자에 따른 수익률, 건축, 디지털의 세계, 자동차의 속도와 회전 등 일상생활의 다양한 모습들을 수학적으로 이해하기 위해서 수학을 배우는 것이다(황혜정 외, 2012).

II. 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 이해

2009년 12월 23일에 교육과정 총론이 발표됨에 따라 2011년 8월 9일, 2009 개정 교육과정에 따른 '수학과 교육과정'이 최종 확정 및 공표되었다. 이 교육과정은 2013년부터 현장에 적용되고 있으며, 이에 대한 개정 배경 및 방향, 창의성 강조를 위한 수학적 과정(mathematical process)의 반영, 교육과정 문서의 구성 및 체제, 학교급별 주요 내용 변화에 대해 간략히 살펴보면 다음과 같다.

01 개정의 기본 방향

새로운 수학과 교육과정에서는 우선적으로 2009 개정 교육과정 총론의 취지에 부합하고 기존 수학과 교육과정의 문제점을 극복할 수 있는 새로운 교육과정의 성격, 목표, 내용 등을 개발하는 데 주력하였다. 특히 미래 사회에서 요구되는 핵심 역량의 주요 요소인 창의 중심의 교육과정 운영 및 교과용 도서 구현이 가능하도록 이에 따른 교육 목표와 내용을 개발하는 데에 초점을 두었으며, 다음의 항목을 구현하고자 하는 것이 새로운 교육과정의 주요 개발 방향이다.

가. 수학 교과 내용의 양 20 % 경감

2009 개정 교육과정 총론의 '교육과정 편성 · 운영 지침'의 주요 변화 내용 중 2007 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정 대비 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서의 내용 20 % 경감의 배경이 될 수 있는 근거는 학교의 특성, 학생 · 교사 · 학부모의 요구 및 필요에 따라 학교가 자율적으로 교과(군)별 20 % 범위 내에서 시수를 증감하여 운영할 수 있는 데 있다(교육과학기술부, 2009). 2009 개정 교육과정 총론에서는 각 교과별로 교육과정의 성취 기준을 개발할 경우 학습량이 증가하여 교육 내용의 적정화를 저해할 우려가 있음을 염두에 두고, 교과별 교육과정 개발 시 현행 교육과정 대비 20 %의 내용이 경감되어야 함을 적극 주장하였다(박순경, 2010). 즉, 기준 수업 시수를 감안하되 교과 내용의 양은 현행 교육과정보다 20 % 정도 감축한다고 상정하고 최적한 학습 내용을 정선함으로써 보다 질 높은 교과 교육과정을 추구하도록 하였다.

나. 수학적 창의성 강조에 따른 수학적 과정

(1) 수학적 창의성의 의미

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서의 수학적 창의성은 수학적 과제를 해결하는 과정에서 다양하고 독창적인 해결 방법을 산출하거나 새로운 관점에서 과제를 탐구하고 지식을 구성하는 능력을 의미한다. 여기서 수학적 과제는 학생들의 수학적 능력 계발을 위한 내용적 배경을 제공하는 것으로서, 예를 들어 학생들이 참여하게 되는 프로젝트, 질문, 문제, 활동 등을 망라한 것이다.

이와 같은 수학적 창의성을 계발하기 위해서는 우선 학생들이 정형화된 틀이나 형식에 얽매이지 않고 자신의 수학적 아이디어를 자유롭게 표현할 수 있는 분위기를 조성해 주어야 한다. 이와 같은 학습 상황에서 학생들은 수학을 학습하고 행하는 과정에서 과제에 대한 호기심, 사고와 판단에서의 독자성, 과제 해결에 대한 집착성과 끈기 등과 같은 창의성의 정의적 측면도 발전시키게 될 것이다.

한편 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서의 수학적 창의성은 학교 수준에서의 수학적 창의성을 의미하기 때문에, 학습자가 수학적 추론과 통찰을 활용하여 기존의 지식과 경험을 유의미한 방법으로 분석 · 연결 · 통합하는 과정에서 창의성이 발현된다고 본다. 또한 학교 수학을 통해서 수학적 창의성을 계발할 때에는 창의적인 사고와 관련되는 일련의 과정을 수학적으로 의사소통하고 표현하는 능력도 신장시켜야 할 것이다.

(2) 수학적 과정의 의미 및 반영

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서 말하는 '수학적 과정'은 수와 연산, 도형 등의 내용 영역에서 다루는 수학적 주제를 이해하고 습득하는 데에서, 그리고 그러한 수학적 주제를 활용하여 다양한 현상을 이해하고 문제를 해결하고 의사소통하는 데에서 활성화되어야 하는 능력을 의미한다. 다시 말해서 '수학적 과정'은 학생들 주변의 다양한 현상을 수학과 연결하고 다양한 상황에서 발생하는 문제를 해결할 때 활성화되어야 하는 수학의 과정적 기능을 의미하며, '수학적 문제 해결, 수학적 추론, 수학적 의사소통' 등을 구성 요소로 가지는 개념으로 정의하였다.

여기서 '수학적 문제 해결'은 수학의 문제나 문제적 상황에서 그 해를 찾아내기 위하여 이미 알고 있는 수학의 개념, 원리, 법칙 등의 지식이나 기능을 바탕으로 수학적 발견술이나 전략 등의 다양하면서 종합적인 사고 과정을 수행하는 것을 의미한다. '수학적 추론'은 수학적 현상이나 사실 등을 대상으로 그와 관련된 잠재적인 수학적 규칙성이나 원리, 구조 등에 결론적으로 이르기 위한 논리적 사고 과정을 수행하는 것을 의미한다. 그리고 '수학적 의사소통'은 수학의 아이디어나 생각 등을 수학적 표현 수단을 통하여 서로 공유하고 학습하게 되는 과정을 수행하는 것을 의미한다(NCTM, 2000).

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 구성 체제를 살펴보면, '목표', '내용', '교수 · 학습 방법', '평가' 등의 순으로 구성되어 있다. 학교에서 구체적으로 학습해야 할 수학 성취 기준은 '내용'에서 학년(군)별로 제시되어 있다. 한편 '수학적 과정'의 하위 구성 요소로 설정한 '수학적 문제 해결, 수학적 추론, 수학적 의사소통'은 우리나라의 수학과 교육과정에서 지속적으로 강조되어 온 사항이다. 2007 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서도 '목표' 및 '교수 · 학습 방법'에서 수학적 문제 해결, 수학적 추론, 수학적 의사소통을 강조하고 있다.

학교의 수학 교수 · 학습의 실질적인 모습을 결정한다고 할 수 있는 교과서의 경우, 그 내용은 주로 수학과 교육과정의 '내용'에 제시되어 있는 성취 기준을 중심으로 구성된다. 현행 수학과 교육과정과 같이 '목표'와 '교수 · 학습 방법'에서 '수학적 과정'과 관련된 제 측면을 과거와 같이 선언적으로만 제시하는 것은, '수학적 과정'과 관련된 제 측면들이 교과서의 내용 구성에 배경으로서 암묵적으로 스며들게 되는 장점이 있다고 볼 수 있지만, 학생들에게 적극적이고 명확하게 지도되지 않는다는 한계점 또한 지니고 있다.

따라서 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서는 현행 수학과 교육과정의 '목표' 및 '교수 · 학습 방법'에서 선언적으로 제시되고 있는 '수학적 과정'의 제 측면들을 보다 구체적인 성취 기준을 가지고 '내용'의 진술에 포함시킴으로써 교과용 도서 및 수업 상황에서 수학적 과정과 관련된 제 측면들을 더욱 적극적이고 분명히 다루게 하고 있다. 한마디로 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정은 '수학적 문제 해결, 수학적 추론, 수학적 의사소통'을 '수학적 과정'으로 간주하고, 이를 학습 내용 성취 기준 및 교수 · 학습상의 유의점, 그리고 교수 · 학습 방법 등에 반영하였다.

수학적 문제 해결, 수학적 추론, 수학적 의사소통의 특징은 각각 다음과 같다.

〈표 Ⅱ-1〉 수학적 과정의 요소 및 특징

수학적 문제 해결
가. 주어진 문제의 해결에 필요한 정보를 확인 또는 보완하고 적절한 전략이나 사고 과정을 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
나. 수학적인 방법으로 문제 해결의 과정과 결과의 타당성을 설명할 수 있다.
다. 문제 해결 과정이나 완결 후 문제 제기를 통하여 문제 해결을 발전적으로 이끌 수 있다.
라. 문제 해결에서 얻은 결과와 사용된 전략을 일반화하여 새로운 문제 상황에 적용할 수 있다.

수학적 추론
가. 수학적 추측이나 주장을 만들고, 수학적 지식에 근거하여 이를 정당화할 수 있다.
나. 수학적 아이디어나 사고 과정을 수학적인 방법으로 검증할 수 있다.
다. 수학적 활동에서 다양하고 독창적인 아이디어가 지니는 가치를 인식할 수 있다.
수학적 의사소통
가. 수학적인 방법을 활용하여 자신의 생각을 논리적으로 정확하게 표현하고, 다른 사람을 이해시킬 수 있다.
나. 수학적 활동 중에 자신의 수학적인 생각을 다른 사람과 주고받는 활동의 중요성을 인식하고, 이를 통하여 자신의 생각을 개선시킬 수 있다.
다. 다른 사람의 수학적 아이디어나 사고 과정을 이해하고 평가할 수 있다.

(3) 학년군제 도입 및 적용

2009 개정 교육과정 총론의 초·중등학교 교육과정 구성의 방침에 의하면 “교육과정 편성·운영의 경직성을 탈피하고, 학년 간 상호 연계와 협력을 통한 학교 교육과정 편성·운영의 유연성을 부여하기 위하여 학년군을 설정한다.”라고 규정하고 있다(교육과학기술부, 2009).

현재 2007 개정 교육과정 체제에서는 학년제를 따르고 있다. 즉, 각 학년에서 배워야 할 내용을 학년별로 제시하였다. 반면 학년군제는 학생들이 배워야 할 내용을 학년별이 아니라 몇 개 학년을 묶어서 제시한다. 예를 들어 초등학교 1학년에서 2학년 사이에 학습할 내용을 초등학교 1~2학년군으로 제시하는 것이다.

학년군제 도입에 따른 가장 큰 변화는 학생들의 수준별 학습이다. 학년군제를 실시하는 것은 학생들의 학습 수준의 차이를 인정하는 것이다. 이해가 빠른 학생들은 더 많은 내용을 혹은 더 깊은 내용을 학습할 수 있고, 이해가 느린 학생들은 기본적인 내용을 집중적으로 학습할 수 있다. 학생들은 자신의 흥미나 적성을 고려하여 필요한 수학 교과를 선택할 수 있으며, 이는 학생들의 진로 선택과 관련될 수 있다.

또 다른 변화는 학년군제에서는 다양한 교과서가 사용될 수 있다는 것이다. 교육과정에서 엄격한 학년의 구분이 없어지고 내용이 통합적으로 제시되기 때문에 관련 내용들을 여러 가지 방법으로 재배치할 수 있게 된다. 예를 들어 초등학교 1학년과 2학년에서 학습할 수와 연산 영역을 초등학교 1학년에서 집중적으로 학습하도록 하는 교과서를 구성할 수 있다. 또는 중학교에서 대수와 함수를 밀접하게 관련시켜서 교과서를 구성할 수 있다. 즉, 수학 교과가 가진 특성을 발휘하여 학생들의 창의력을 발달시킬 수 있는 다양한 교과서의 출현이 가능하게 된다.

그러나 학년군제에 따르는 단점들도 충분히 예상되기 때문에 학년군제를 실행하기 위해서는 다음과 같은 사항들에 대한 해결 방안이 모색되어야 한다.

첫째, 수준별 수업 방안이 마련되어야 한다. 학년제 대신에 학년군제를 실시하는 취지 중의 하나는 학생들의 학습 수준 차를 인정하고 학생들의 수준에 맞는 학습을 통해서 사고 발달과 진로 선택에 긍정적인 효과를 주기 위함이다. 따라서 학생들의 수준에 적합한 수업이 가능한 수준별 수업 방안이 마련되어야 한다.

둘째, 수준별 수업이 원활히 시행되기 위해서는 적절한 평가 기준이 마련되어야 한다. 학생들의 다양한 진로와 흥미를 고려하여 과목을 이수하고 이에 대한 타당한 평가가 이루어져야 한다.

셋째, 교육과정이 학년군으로 구성되더라도 학년별로 교과서가 어떻게 저술되어야 하는지에 대한 기준이 필요하다.

넷째, 전학생들을 위한 보충 학습 과정 등 교수·학습 방안 및 정책이 마련되어야 한다.

02 수학과 교육과정의 특징

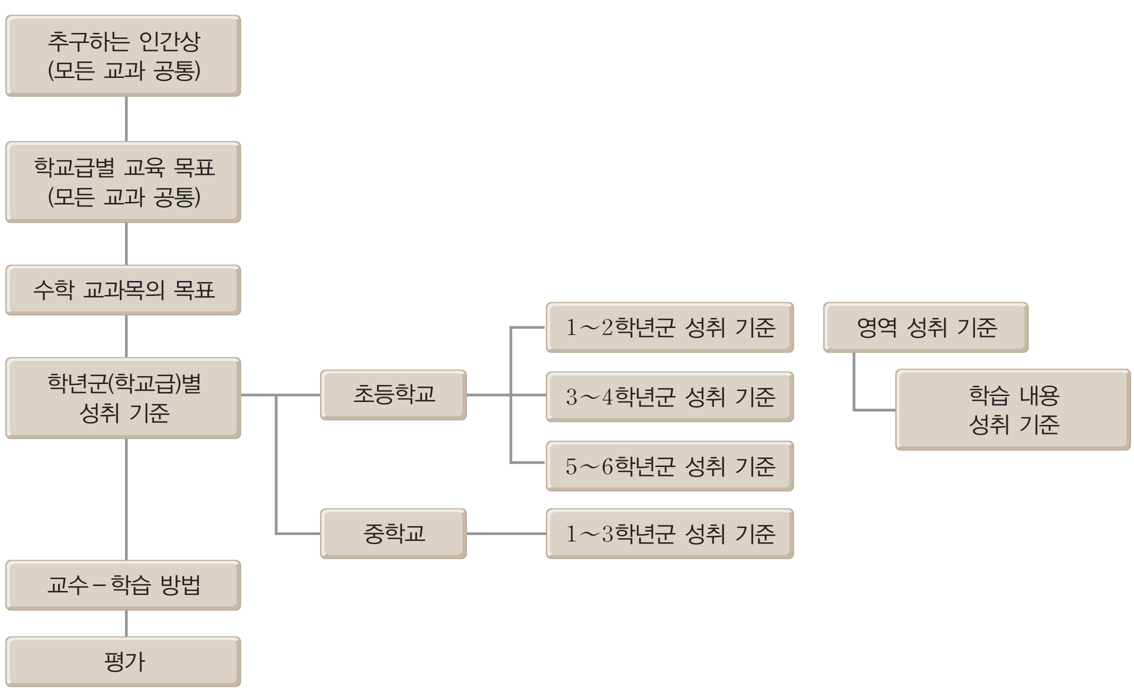
가. 교과목의 구성 및 문서 체제

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 교과목은 공통 교육과정과 선택 교육과정으로 구성되어 있으며, 공통 교육과정에는 초등학교 1학년에서부터 중학교 3학년까지 다뤄지는 「수학」 교과목이 해당되며, 선택 교육과정에는 고등학교 1학년에서 3학년까지 다뤄지는 9개 교과목이 포함되어 있다. 선택 교육과정은 '기본 과목', '일반 과목', '심화 과목'으로 구성되어 있으며, 일반 과목은 모두 5단위의 6개 선택 과목으로 「수학Ⅰ」, 「수학Ⅱ」, 「확률과 통계」, 「미적분Ⅰ」, 「미적분Ⅱ」, 「기하와 벡터」로 구성되어 있다. 그 밖에 기본 과목에는 「기초 수학」, 심화 과목에는 「고급 수학Ⅰ」과 「고급 수학Ⅱ」가 포함된다.

공통 교육과정		
1. 수학		
선택 교육과정		
〈기본 과목〉	〈일반 과목〉	〈심화 과목〉
1. 기초 수학	1. 수학 Ⅰ 2. 수학 Ⅱ 3. 확률과 통계 4. 미적분 Ⅰ 5. 미적분 Ⅱ 6. 기하와 벡터	1. 고급 수학 Ⅰ 2. 고급 수학 Ⅱ

[그림 Ⅱ-1] 수학과 교육과정의 교과목 구성

공통 교육과정 기간에 다뤄지는 수학 교과목의 문서 체제를 예로 들어 도식화하면 다음과 같으며, 선택 교육과정 기간의 9개 교과목의 문서 체제도 이와 동일한 방식으로 구성되어 있다. 여기서 각 교과목의 '3. 목표'는 2007 개정 교육과정의 '1. 성격'과 '2. 목표'의 두 부문의 진술을 통합하여 진술하고 있다. 특히 「수학」 교과목의 목표의 경우, 예전에 분리하여 제시되어 있던 초등학교와 중학교의 교육 목표가 통합, 진술되었다.



[그림 Ⅱ-2] 수학 교과목의 목표 및 성취 기준

나. 영역 구분의 변경

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정은 제7차 개정의 것과 마찬가지로, 학교급별 특성을 감안하여 초등학교와 중학교 각각의 내용 영역을 구분하였으며, 초등학교의 경우 ‘규칙성과 문제 해결’ 영역을 ‘규칙성’으로 변경하였다. 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서는 모든 학교급 및 모든 수학 교과목에 걸쳐 수학적 과정의 요소로서 문제 해결 활동을 전 영역 및 세부 내용에 걸쳐 적극 반영하도록 강조하고 있기 때문이다.

2007 개정 교육과정			
초등학교	수와 연산	중·고등학교	수와 연산
	도형		문자와 식
	측정		함수
	확률과 통계		확률과 통계
	규칙성과 문제 해결		기하

2009 개정 교육과정			
초등학교	수와 연산	중학교	수와 연산
	도형		문자와 식
	측정		함수
	규칙성		확률과 통계
	확률과 통계		기하

[그림 Ⅱ-3] 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 영역명

03 학교급별 내용 변화

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서의 학교급별, 학년군별 내용의 변화는 기본적으로 학교 현장에서의 창의성 활동을 실제적이고 효율적으로 실행하기 위한 것으로, 학습 내용의 적정화 및 학년별 내용 분량이 조정되었다. 수학과 교육과정의 총 10개 교과목에 대한 주요 변화 내용을 학교급별로 살펴보면 다음과 같다.

가. 초등학교

(1) 수와 연산

초등학교의 수와 연산 영역에서 가장 큰 변화로는 자연수 및 분수의 지도 시기를 재조정하고, 계산 연습을 통한 단순한 연산 기능 신장이 아니라 연산 감각 및 양적 추론 능력을 강화한 점을 들 수 있다. 또한 사칙연산의 계산 결과를 어림한 후 어림한 값을 확인하거나 소수의 복잡한 계산에 있어서 계산기를 도입하여 활용할 수 있게 함으로써, 지나친 계산 연습에서 기인하는 학습 부담을 경감하고자 하였다.

(2) 도형

2007 개정 교육과정에서 평면도형의 각 구성 요소에 대한 학습 후 도형의 언어적이고 명시적인 정의를 통해서 도형 개념을 도입하는 방식을 대신하여, 2009 개정 교육과정에서는 도형의 모양 인식 및 분류 활동을 토대로 하여 도형 및 그 구성 요소에 대한 직관적인 이해와 더불어 이름을 먼저 학습한 후 점차 분석적, 명시적으로 도형의 개념 및 성질을 학습할 기회를 제공하였다. 한편 2007 개정 교육과정에서 분산되어 지도되었던 각, 삼각형, 사각형 관련 단원의 내용들을 각각 통합적으로 취급함으로써 학생들의 개념 구조의 체계적 형성을 돕고자 하였다. 또 초등학생의 인지 수준에 적합하지 않은 내용으로 간주되는 사각형의 포함 관계나 수학 학습의 계열상 초등 수학에서 다루는 것이 적합하지 않은 선대칭 위치에 있는 도형과 점대칭 위치에 있는 도형 및 회전체를 삭제하였다.

(3) 측정

측정 영역은 실생활과 밀접하게 관련되어 있으므로, 실생활과 관련지어 측정의 필요성을 인식하게 하고 측정 및 어림 활동을 통하여 양감을 기르는 데 중점을 두었다. 측정 영역에서의 계산은 측정 결과 간의 단순 연산이나 단위 환산은 축소하고, 측정의 관점에 중점을 두도록 하였다. 길이, 무게, 들이, 넓이의 양감을 기르는 데 중점을 두고, 측정 영역에서 합과 차를 계산하거나 단순한 단위 환산 연습은 약화하였으며, 들이 및 무게의 덧셈과 뺄셈은 실생활 문제 상황을 통하여 다루도록 하였다. 또한 부피의 양감을 강조하고 부피의 단위 사이의 환산이나 부피와 들이의 단위 환산은 삭제하여 학습량을 감축하였다.

(4) 규칙성

2007 개정 교육과정에서 '규칙성과 문제 해결' 영역은 주로 문제 해결 방법, 규칙 찾기, 비와 비율, 비례 등을 포괄하였다. 2009 개정 교육과정에서는 '문제 해결'이 다른 영역의 내용적 성격과 달리 과정적 성격을 띠고 있으며 수학 교과 전 영역에서 고루 지도되어야 한다는 취지에서 '문제 해결' 부분은 전 영역으로 재편하고, 영역명은 '규칙성'으로 설정하였다. 규칙성 영역의 주요 변화로는 각 학년에 분산되어 있던 규칙 찾기 활동을 통합하고 탐구 활동 및 놀이를 활용하고자 하였다. 비율 중 할, 푼, 리나 연비는 그 중요도 및 쓰임새를 재고하여 삭제하였으며, 방정식은 중학교의 학습 내용과 중복하여 다루어지고 있으므로 초등학교에서는 삭제하고 중학교의 '일차방정식'으로 이동 통합함으로써 학습량을 감축하였다.

(5) 확률과 통계

확률과 통계 영역에서의 가장 큰 변화는 줄기와 잎 그림, 경우의 수와 확률을 중학교로 이동 통합하고, 초등학교에 가능성의 개념을 도입한 것이다. 줄기와 잎 그림은 학습량 감축 및 학문 내에서의 개념 간 관련성을 고려하여 중학교의 통계 영역과 의미 있게 연결되도록 상향 이동하였다. 또한 경우의 수와 확률은 초등학교와 중학교에서 내용 중복 및 학습량 감축의 취지에서 중학교로 이동 통합하였고, 확률 개념의 계열적 구성이라는 측면에서 가능성이라는 개념을 초등학교 5~6학년군에 도입하였다.

이상으로 초등학교에서의 주요 변화 내용을 정리하면 다음과 같다.

- 시간의 덧셈과 뺄셈 약화 (3～4학년군)
- 사각형의 포함 관계 삭제 (3～4학년군)
- 할, 푼, 리 삭제 (5～6학년군)
- 등식의 성질 삭제 (5～6학년군), 중학교로 상향 이동
- 방정식 삭제 (5～6학년군), 중학교로 상향 이동
- 연비의 삭제 (5～6학년군)
- 겉넓이와 부피 통합 및 부피와 들이 사이의 관계 삭제 (5～6학년군)
- 선대칭 위치에 있는 도형과 점대칭 위치에 있는 도형 삭제 (5～6학년군)
- 회전체 삭제 (5～6학년군), 중학교로 상향 이동
- 가능성 도입 및 확률 삭제 (5～6학년군), 중학교로 상향 이동
- 줄기와 잎 그림 삭제 (5～6학년군), 중학교로 상향 이동

나. 중학교

(1) 수와 연산

수는 수학에서 다루는 대상 중에서 가장 기본이 되는 개념으로서 수의 개념과 연산에 대한 이해는 실생활뿐 아니라 다른 교과나 수학의 다른 영역을 학습하는 데 필수적이다. 따라서 수와 연산 영역은 수의 개념과 연산에 대한 이해를 높이고 이후의 학습과 연계될 수 있는 필수적인 요소만을 선정하였다. 또한 집합은 고등학교로 상향 이동하였고, 근삿값은 삭제하였다.

(2) 문자와 식

문자는 생활 주변이나 자연 및 사회 현상을 수학적으로 간단하게 표현하고 의사소통을 원활히 할 수 있게 해준다. 문자와 식 영역에서는 학생들이 자연스럽게 문자를 사용할 수 있도록 문자와 식을 실생활 문제 해결의 맥

락에서 다루게 하고, 수학이 현실 세계의 상황과 밀접한 관련이 있다는 것을 학생들에게 인식시켜야 한다. 이를 위해 방정식, 부등식과 그의 활용은 독립적인 중영역이 아닌 하나의 영역에서 통합하여 학습하도록 구성하였다. 또한 방정식과 부등식의 학습에 있어서 용어 사용에 대한 학습자의 부담을 고려하여 필요 이상의 용어 정의를 제한하였다.

⑶ 함수

2007 개정 교육과정에서는 제7차 교육과정에서 정비례와 반비례를 통해 함수 개념을 도입하면서 발생했던 문제점을 보완하기 위해, 정비례와 반비례를 초등학교 6학년으로 이동시키고 함수 개념을 '한 양이 변함에 따라 다른 양이 하나씩 정해지는 두 양 사이의 대응 관계'로 도입하고, 실생활을 활용하여 함수 개념의 효용성을 알게 하는 것이 필요하다고 하였다(교육과학기술부, 2007). 이런 점에서 볼 때 중학교 수준의 함수 영역은 현실 세계의 상황을 이해하는 도구로서의 함수 개념에 초점을 맞추고, 고등학교 함수에서 여러 영역을 통합하는 아이디어로서 대응의 관점에서 정의된 형식화된 함수 개념으로 확장될 수 있는 기반이 되도록 하는 것이 바람직하다. 이에 2009 개정 교육과정에서는 함수 개념의 도입 방법의 변화를 도모하고, 정의역, 공역, 치역 등의 용어를 삭제하였다.

⑷ 확률과 통계

확률과 통계는 중학교 수학에서 실생활과 관련성이 매우 깊은 영역이다. 중학교에서는 자료의 정리와 표, 그래프의 해석, 통계적 확률과 수학적 확률의 관계, 확률의 계산, 대푯값과 산포도의 내용이 다루어진다. 본 개정안에서는 학생들이 통계를 학습함으로써 분석적이고 비판적인 사고를 도모할 수 있도록 내용의 변화는 최소화하면서, 교수 · 학습 방법의 변화를 도모하였다. 2007 개정 교육과정과 달라진 내용은 학습량 감축을 위해 '누적도수의 분포'를 삭제하고, 탐색적 자료 분석의 한 방법인 '줄기와 잎 그림'을 도수분포와 그래프 학습 내용에 추가한 것이다.

⑸ 기하

수학 교육에서 증명은 전통적으로 학생들에게 꼭 가르쳐야 하는 주요 대상으로 인식되어 왔다(NCTM, 2000). 그러나 중학교 수학에서의 증명 교육은 기대하는 만큼의 효과를 거두지 못하고 있음이 알려져 있다. 그 이유는 학생들이 기하에서 다루는 개념에 대한 지식이 부족한 탓도 있겠지만, 공리 체계 내에서 논리 규칙에 따라 명제들을 체계적으로 연결시키는 데 어려움을 느끼기 때문이다.

2009 개정 교육과정에서 기하 영역은 학생들이 도형을 탐구하여 기하학적 성질을 이해하고 이를 통해 추론 능력을 신장시키는 것을 목표로 한다. 또한 기하학적 성질을 이해하고 그 지식을 습득하는 방법에 있어서 학생 활동을 중시하고 증명 대신 추측 활동을 강조한다. 이를 위하여 다음 표에서와 같이 2009 개정 교육과정에서는 '증명할 수 있다' 대신 '이해하고 설명할 수 있다'로 제시하였다.

〈표 Ⅱ-2〉 '추측과 정당화' 강조에 대한 내용 비교

2007 개정 교육과정	2009 개정 교육과정
5 삼각형과 사각형의 성질(2학년) ① 명제의 뜻과 증명의 의미를 이해한다. ② 삼각형의 합동조건을 이용하여 삼각형과 사각형의 성질을 증명할 수 있다.	5 삼각형과 사각형의 성질 ① 이등변삼각형의 성질을 이해하고 설명할 수 있다. ② 삼각형의 외심과 내심의 성질을 이해하고 설명할 수 있다. ③ 사각형의 성질을 이해하고 설명할 수 있다.

2009 개정 교육과정에 제시한 ‘이해하고 설명할 수 있다’는 ‘정당화(justification)’를 의미하는데, 이는 자신의 주장 또는 믿음을 타인에게 이해시키려는 시도를 말한다. 이 시도는 일정 수준의 객관성을 담보할 수 있어야 한다. 인식론의 관점에서 정당화는 실험에 의한 정당화, 증거에 의한 정당화, 그리고 논리에 의한 수학적 증명 등으로 대변할 수 있다(http://www.wikipedia.org). 이때 수학적 증명은 논리적 연역법을 의미한다. 기하 교육에서의 증명은 기하 지식을 증거로 삼으며 논리적 형식을 갖춘 정당화를 의미한다(신이섭 외, 2011).

정당화를 유도하는 교수 방법은 다양한 형태로 나타날 수 있다. 예를 들면 학생들의 이해 수준에 합당한 간단한 논리 증명(연역 추론), 계산에 입각한 문제 해결(계산 증명), 그리고 귀납 추론 등이 포함된다. 정당화 교육을 중심으로 한 기하 교육은 기본적으로 학생의 활동에 의존한다. 형식적이고 엄밀한 증명 대신 추측과 정당화 활동을 강조하여, 증명을 하기 위해 익숙해져야 하는 용어와 기호의 사용이나 형식 논리 규칙의 이용에서 생기는 어려움을 줄이고 학생의 기하 지식에 기초한 추론 활동을 강화하는 것이다.

이와 같이 기하 교육에서 객관적 사실의 확인 과정인 논리 증명을 정당화 수준으로 확대함으로써, 논리 형식만을 다루는 것이 아니라 학생들의 인지 수준과 흥미를 고려한 추론 기회를 폭넓게 제공하려 하였다. 이러한 활동은 기하에 대한 이해와 반성적 사고뿐만 아니라 의사소통 능력의 향상에도 도움이 될 것이다.

한마디로 중학교의 기하 영역에서는 학생 활동이 중심이 되는 학생 주도적 수업을 강조하며 형식적 증명보다는 학생의 이해 수준에 입각한 ‘정당화’ 수준의 교육을 지향하고자 하였다. 또한 2007 개정 교육과정의 단발성 주제와 상대적으로 의미가 적은 용어들을 삭제하고, ‘원과 직선’, ‘원주각’ 두 영역을 원의 성질로 묶어 하나의 영역으로 내용을 축소시켜 다루는 등, 전체적으로 학습량을 경감하였다.

이상으로 중학교에서의 주요 변화 내용을 정리하면 다음과 같다.

- 집합 삭제
- 근삿값 삭제
- 십진법과 이진법 삭제
- 수학 개념과 실생활 활용의 통합
- 방정식 관련 용어 약화
- 함수 개념 도입 방법의 변화
- 정의역, 공역, 치역 용어 삭제
- 통계 교수 · 학습 방법의 변화
- 누적도수의 분포 삭제
- 줄기와 잎 그림 추가
- 정당화에 의한 기하 교육 강조
- 작도와 합동, 평면도형의 성질 내용 축소
- 원의 성질 내용 축소

다. 고등학교

(1) 일반 과목

고등학교의 일반 과목에 해당하는 6개 교과목의 주요 변화 내용을 개략적으로 살펴보면 다음과 같다.

■ 수학 I

「수학 I」은 국민 공통 기본 교육 기간인 중학교 3학년까지의 「수학」을 이수한 후 보다 높은 수준의 수학을 학습하기 위하여 선택할 수 있는 과목으로, 고등학교에서 개설되는 선택 과목 중에서 가장 기초가 되는 과목이다.

「수학 I」의 내용은 2007 개정 교육과정에서 고등학교 1학년 학생들이 1년 동안 필수로 이수하는 과목인 [수학]의 내용 중 ‘수와 연산’, ‘문자와 식’, ‘기하’ 영역의 일부를 재구성한 것으로 크게 ‘다항식’, ‘방정식과 부등식’, ‘도형의 방정식’의 3개 영역으로 구성된다. ‘다항식’ 영역에서는 다항식의 연산, 나머지정리, 인수분해를, ‘방정식과 부등식’ 영역에서는 복소수와 이차방정식, 이차방정식과 이차함수, 여러 가지 방정식, 여러 가지 부등식을 다룬다.

「수학 I」의 내용 중 2007 개정 교육과정 내용과 비교

하여 변화된 부분을 간략히 정리하면 다음과 같다.

- 실수 삭제
- 복소수와 이차방정식의 연계 강화
- 다항식의 약수와 배수 약화
- 이차방정식, 이차부등식, 이차함수의 통합 및 연계성 강화

■ 수학II

「수학Ⅱ」는 국민 공통 기본 교육 기간인 중학교 3학년까지의 「수학」과 「수학Ⅰ」을 이수한 후 보다 높은 수준의 수학을 학습하기 위하여 선택할 수 있는 과목으로, 고등학교에서 개설되는 선택 과목 중에서 「수학Ⅰ」과 함께 기초가 되는 과목이다.

「수학Ⅱ」의 내용은 2007 개정 교육과정에서 고등학교 1학년 학생들이 1년 동안 필수로 이수하는 과목인 [수학]의 내용 중 '집합과 명제'와 '함수' 영역의 내용, [수학Ⅰ]의 내용 중 '수열' 영역과 '지수함수와 로그함수'의 내용 중 일부를 재구성한 것으로 크게 '집합과 명제', '함수', '수열', '지수와 로그'의 4개 영역으로 구성된다. '집합과 명제' 영역에서 집합, 명제를, '함수' 영역에서 함수, 유리함수와 무리함수를, '수열' 영역에서 등차수열과 등비수열, 수열의 합, 수학적 귀납법을, '지수와 로그' 영역에서 지수, 로그를 다룬다.

「수학Ⅱ」의 내용 중 2007 개정 교육과정 내용과 비교하여 변화된 부분을 간략히 정리하면 다음과 같다.

- 집합 내용 통합
- 명제 내용 보완 및 증명 부분 강화
- 함수 영역의 내용 약화
- 수열의 약화 및 이동
- 지수와 로그 내용 약화 및 이동

■ 확률과 통계

「확률과 통계」는 「수학Ⅰ」과 「수학Ⅱ」를 이수한 후 또는 「미적분Ⅰ」까지 이수한 학생이 선택할 수 있는 과목으로, 대학에 진학하여 인문 과학, 사회 과학 또는 자연 과학 등의 분야를 전공하고자 하는 학생이 이수하기에 알맞은 과목이다.

「확률과 통계」는 2007 개정 교육과정에서 고등학교 1학년 학생들이 필수로 이수하는 고등학교 [수학]의 '확률과 통계' 영역, 선택 과목인 [미적분과 통계 기본]과 [적분과 통계]의 '확률', '통계' 영역, 그리고 [적분과 통계]의 '순열과 조합' 영역의 내용을 재구성한 것으로 크게 '순열과 조합', '확률', '통계'의 3개 영역으로 구성된다. '순열과 조합' 영역에서 경우의 수, 순열과 조합, 분할, 이항정리를, '확률' 영역에서 확률의 뜻과 활용, 조건부확률을 '통계' 영역에서 확률분포, 통계적 추정을 다룬다.

「확률과 통계」의 내용 중 2007 개정 교육과정 내용과 비교하여 변화된 부분을 간략히 정리하면 다음과 같다.

- 순열과 조합 관련 내용 통합 및 추가
- 연속확률변수의 평균과 표준편차 삭제
- 공학적 도구의 활용 강조

■ 미적분 I

「미적분Ⅰ」은 「수학Ⅰ」과 「수학Ⅱ」를 이수한 후 선택할 수 있는 과목으로, 대학에 진학하여 인문 과학, 사회 과학 등의 분야를 전공하고자 하는 학생이 이수하기에 알맞은 과목이다.

「미적분Ⅰ」은 2007 개정 교육과정에서 [수학Ⅰ]의 '수열의 극한' 영역과 [미적분과 통계 기본]의 '함수의 극한과 연속', '다항함수의 미분법', '다항함수의 적분법' 영역의 내용을 기본으로 하고 [수학Ⅱ]의 '미분법' 영역의 내용 중 '롤의 정리, 평균값 정리의 이해와 활용'에 대한 내용을 추가하여 '수열의 극한', '함수의 극한과 연속', '다항함수의 미분법', '다항함수의 적분법'의 4개의 대영역으로 구성된다. '수열의 극한' 영역에서 수열의 극한, 급수를, '함수의 극한과 연속'에서 함수의 극한, 함수의 연속을, '다항함수의 미분법' 영역에서 미분계수, 도함수, 도함수의 활용을, '다항함수의 적분법' 영역에서 부정적분, 정적분, 정적분의 활용을 다룬다.

「미적분Ⅰ」의 내용 중 2007 개정 교육과정 내용과 비교하여 변화된 부분을 간략히 정리하면 다음과 같다.

- 수열의 극한의 이동 통합
- 롤의 정리와 평균값 정리의 이동
- 도함수의 활용 영역의 교수 · 학습상의 유의점 보완 및 삭제
- 용어 수정(중간값 정리를 사이값 정리로 수정)

■ 미적분Ⅱ

「미적분Ⅱ」는 「미적분Ⅰ」을 이수한 후 선택할 수 있는 과목으로, 대학의 자연 계열 또는 공학 계열 진학을 희망하는 학생에게 필요한 기본 과목이다.

「미적분Ⅱ」는 2007 개정 교육과정에서 고등학교 1학년 학생들이 필수로 이수하는 [수학]의 '함수' 영역, [수학Ⅰ]의 '지수함수와 로그함수' 영역, [수학Ⅱ]의 '삼각함수', '함수의 극한과 연속'과 '미분법' 영역, [적분과 통계]의 '적분법' 영역의 내용을 재구성한 것으로 크게 '지수함수와 로그함수', '삼각함수', '미분법', '적분법'의 4개 영역으로 구성된다. '지수함수와 로그함수' 영역에서 지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프, 지수함수와 로그함수의 미분을, '삼각함수' 영역에서 삼각함수의 뜻과 그래프, 삼각함수의 미분을, '미분법' 영역에서 여러 가지 미분법, 도함수의 활용을, '적분법' 영역에서 여러 가지 적분법, 정적분의 활용을 다룬다.

「미적분Ⅱ」의 내용 중 2007 개정 교육과정 내용과 비교하여 변화된 부분을 간략히 정리하면 다음과 같다.

- 지수함수와 로그함수 통합 및 약화
- 삼각함수 통합 및 약화
- 미분법 및 적분법의 내용 조정

■ 기하와 벡터

「기하와 벡터」는 '미분과 적분'을 이수한 후 선택할 수 있는 과목으로, 대학의 자연 계열 또는 공학 계열로 진학을 희망하는 학생에게 필요한 기본 과목이다.

「기하와 벡터」는 2007 개정 교육과정에서 [수학Ⅱ]의 '미분법' 영역과 [적분과 통계]의 '적분법' 영역, 그리고 [기하와 벡터]의 '이차곡선', 공간도형과 공간좌표', '벡터' 영역의 내용을 재구성한 것으로 크게 '평면 곡선', '평면벡터', '공간도형과 공간벡터'의 3개 영역으로 구성된다. '평면 곡선' 영역에서 이차곡선, 평면 곡선의 접선을, '평면벡터' 영역에서 벡터의 연산, 평면벡터의 성분과 내적, 평면 운동을, '공간도형과 공간벡터' 영역에서 공간도형, 공간좌표, 공간벡터를 다룬다.

「기하와 벡터」의 내용 중 2007 개정 교육과정 내용과 비교하여 변화된 부분을 간략히 정리하면 다음과 같다.

- 미분법을 이용한 평면 곡선의 이해 강화
- 위치벡터를 이용한 평면 운동의 이해 강화

(2) 기본 및 심화 과목

고등학교의 경우에는 일반 과목에 해당하는 6개 교과목 이외에, 기본 과목인 「기초 수학」과 심화 과목인 「고급 수학Ⅰ」, 「고급 수학Ⅱ」가 새로 신설되었다.

「기초 수학」은 중학교 수학의 내용을 잘 이해하지 못한 학생이 일반 과목의 수학 교과를 이수하기 위해 필요한 수학적 개념, 원리, 법칙을 체계적으로 이해하기 위하여 선택할 수 있는 기본 과목이다.

「기초 수학」의 내용은 '수와 식의 계산', '방정식과 함수', '피타고라스 정리와 삼각비'로 구성된다. '수와 식의 계산' 영역에서는 수의 연산, 문자의 사용과 식의 계산, 다항식의 계산을, '방정식과 함수' 영역에서는 일차방정식과 일차함수, 이차방정식과 이차함수를, '피타고라스 정리와 삼각비' 영역에서는 피타고라스 정리, 삼각비를 다룬다.

「고급 수학Ⅰ」과 「고급 수학Ⅱ」는 심화 과목으로 일반 과목에서 학습한 수학의 기본 지식과 기능을 바탕으로 심화된 수준의 수학적 개념, 원리, 법칙을 체계적으로 이해하고, 수학적 사고력, 창의적 사고력, 문제 해결력 등을 신장시킬 수 있도록 하는 과목이다. 「고급 수학Ⅰ」과 「고급 수학Ⅱ」는 심화된 수학적 지식과 사고 방법을 습득하고, 논리적 추론 능력을 키워 문제를 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르게 함으로써 자연과학 및 공학 분야뿐만 아니라 사회과학의 학습에 기초를 제공한다.

「고급 수학Ⅰ」의 내용은 '벡터와 행렬', '일차변환', '그래프'로 구성된다. '벡터와 행렬' 영역에서는 벡터, 행렬과 연립일차방정식을, '일차변환' 영역에서는 일차변환과 행렬, 고윳값과 행렬의 거듭제곱을, '그래프' 영역에서는 그래프의 뜻, 여러 가지 그래프, 그래프의 활용을 다룬다. 「고급 수학Ⅱ」의 내용은 '복소수와 극좌표', '미적분의 활용', '편미분'으로 구성된다. '복소수와 극좌

표' 영역에서는 복소수의 극형식, 극좌표와 극방정식을, '미적분의 활용' 영역에서는 미분의 활용, 미분방정식, 적분의 활용을, '편미분' 영역에서는 이변수함수의 뜻, 극한과 연속, 편미분, 편미분의 활용을 다룬다.

04 내용 체계

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 '수학' 교과목(초등학교 1학년~중학교 3학년)의 내용 체계는 다음과 같다.

학교급 / 학년군 / 영역	초등학교		
	1~2학년군	3~4학년군	5~6학년군
수와 연산	• 네 자리 이하의 수 • 두 자리 수의 덧셈과 뺄셈 • 곱셈	• 다섯 자리 이상의 수 • 세 자리 수의 덧셈과 뺄셈 • 곱셈 • 나눗셈 • 자연수의 혼합 계산 • 분수 • 소수 • 분수와 소수의 덧셈과 뺄셈	• 약수와 배수 • 분수의 덧셈과 뺄셈 • 분수의 곱셈과 나눗셈 • 소수의 곱셈과 나눗셈 • 분수와 소수
도형	• 입체도형의 모양 • 평면도형의 모양 • 평면도형과 그 구성 요소	• 도형의 기초 • 평면도형의 이동 • 원의 구성 요소 • 여러 가지 삼각형 • 여러 가지 사각형 • 다각형	• 합동과 대칭 • 직육면체와 정육면체 • 각기둥과 각뿔 • 원기둥과 원뿔 • 입체도형의 공간감각
측정	• 양의 비교 • 시각 읽기 • 시각과 시간 • 길이	• 시간 • 길이 • 들이 • 무게 • 각도 • 어림하기(반올림, 올림, 버림) • 수의 범위(이상, 이하, 초과, 미만)	• 평면도형의 둘레와 넓이 • 무게와 넓이의 여러 가지 단위 • 원주율과 원의 넓이 • 겉넓이와 부피
규칙성	• 규칙 찾기	• 규칙 찾기 • 규칙과 대응	• 비와 비율 • 비례식과 비례배분 • 정비례와 반비례
확률과 통계	• 분류하기 • 표 만들기 • 그래프 그리기	• 자료의 정리 • 막대그래프와 꺾은선그래프	• 가능성과 평균 • 자료의 표현 • 비율그래프(띠그래프, 원그래프)

<table>
<tr><th rowspan="2">학교급 / 학년군 / 영역</th><th colspan="3">중학교</th></tr>
<tr><th colspan="3">1～3학년군</th></tr>
<tr><td>수와 연산</td><td>• 소인수분해
• 최대공약수, 최소공배수
• 정수와 유리수의 개념, 대소 관계, 사칙계산</td><td>• 순환소수
• 유리수와 순환소수의 관계</td><td>• 제곱근의 뜻과 성질
• 무리수
• 실수의 대소 관계
• 근호를 포함한 식의 사칙계산</td></tr>
<tr><td>문자와 식</td><td>• 문자의 사용
• 식의 값
• 일차식의 덧셈과 뺄셈
• 일차방정식</td><td>• 지수법칙
• 다항식의 덧셈과 뺄셈
• 다항식의 곱셈과 곱셈 공식
• 다항식의 나눗셈
• 등식의 변형
• 연립일차방정식
• 부등식의 성질과 일차부등식
• 연립일차부등식</td><td>• 인수분해
• 이차방정식</td></tr>
<tr><td>함수</td><td>• 함수의 개념
• 순서쌍과 좌표
• 함수의 그래프</td><td>• 일차함수의 의미와 그래프
• 일차함수의 활용
• 일차함수와 일차방정식의 관계</td><td>• 이차함수의 의미
• 이차함수의 그래프의 성질</td></tr>
<tr><td>확률과 통계</td><td>• 줄기와 잎 그림, 도수분포표, 히스토그램, 도수분포다각형
• 도수분포표에서의 평균
• 상대도수의 분포</td><td>• 경우의 수
• 확률의 뜻과 기본 성질
• 확률의 계산</td><td>• 중앙값, 최빈값, 평균
• 분산, 표준편차</td></tr>
<tr><td>기하</td><td>• 점, 선, 면, 각
• 점, 직선, 평면 사이의 위치 관계
• 평행선의 성질
• 삼각형의 작도
• 삼각형의 합동조건
• 다각형의 성질
• 부채꼴에서 중심각과 호의 관계
• 부채꼴에서 호의 길이와 넓이
• 다면체, 회전체의 성질
• 입체도형의 겉넓이와 부피</td><td>• 이등변삼각형의 성질
• 삼각형의 외심, 내심
• 사각형의 성질
• 닮은 도형의 성질
• 삼각형의 닮음조건
• 평행선 사이에 있는 선분의 길이의 비
• 닮은 도형의 성질 활용</td><td>• 피타고라스 정리
• 삼각비
• 원의 현, 접선에 대한 성질
• 원주각의 성질</td></tr>
</table>

2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 '수학' 교과목 이외에 고등학교 선택 교과목의 내용 체계는 다음과 같다.

〈기본 과목〉

■ 기초 수학

영역	내용
수와 식의 계산	• 수의 연산 • 문자의 사용과 식의 계산 • 다항식의 계산
방정식과 함수	• 일차방정식과 일차함수 • 이차방정식과 이차함수
피타고라스 정리와 삼각비	• 피타고라스 정리 • 삼각비

〈일반 과목〉

■ 수학 I

영역	내용
다항식	• 다항식의 연산 • 나머지정리 • 인수분해
방정식과 부등식	• 복소수와 이차방정식 • 이차방정식과 이차함수 • 여러 가지 방정식 • 여러 가지 부등식
도형의 방정식	• 평면좌표 • 직선의 방정식 • 원의 방정식 • 도형의 이동 • 부등식의 영역

■ 수학 II

영역	내용
집합과 명제	• 집합 • 명제
함수	• 함수 • 유리함수와 무리함수
수열	• 등차수열과 등비수열 • 수열의 합 • 수학적 귀납법
지수와 로그	• 지수 • 로그

■ 미적분 I

영역	내용
수열의 극한	• 수열의 극한 • 급수
함수의 극한과 연속	• 함수의 극한 • 함수의 연속
다항함수의 미분법	• 미분계수 • 도함수 • 도함수의 활용
다항함수의 적분법	• 부정적분 • 정적분 • 정적분의 활용

■ 미적분 II

영역	내용
지수함수와 로그함수	• 지수함수와 로그함수의 뜻과 그래프 • 지수함수와 로그함수의 미분
삼각함수	• 삼각함수의 뜻과 그래프 • 삼각함수의 미분
미분법	• 여러 가지 미분법 • 도함수의 활용
적분법	• 여러 가지 적분법 • 정적분의 활용

■ 확률과 통계

영역	내용
순열과 조합	• 경우의 수 • 순열과 조합 • 분할 • 이항정리
확률	• 확률의 뜻과 활용 • 조건부확률
통계	• 확률분포 • 통계적 추정

■ 기하와 벡터

영역	내용
평면 곡선	• 이차곡선 • 평면 곡선의 접선
평면벡터	• 벡터의 연산 • 평면벡터의 성분과 내적 • 평면 운동
공간도형과 공간벡터	• 공간도형 • 공간좌표 • 공간 벡터

〈심화 과목〉

■ 고급 수학 I

영역	내용
벡터와 행렬	• 벡터 • 행렬과 연립일차방정식
일차변환	• 일차변환과 행렬 • 고윳값과 행렬의 거듭제곱
그래프	• 그래프의 뜻 • 여러 가지 그래프 • 그래프의 활용

■ 고급 수학 II

영역	내용
복소수와 극좌표	• 복소수의 극형식 • 극좌표와 극방정식
미적분의 활용	• 미분의 활용 • 미분방정식 • 적분의 활용
편미분	• 이변수함수의 뜻 • 극한과 연속 • 편미분 • 편미분의 활용

Ⅲ. 수학 교과서의 개발 동향

01 구성주의와 수학 교과서

구성주의의 수학 교육관은 '학생에 의한 수학 지식의 자주적 구성'이라는 교육관에 기초한다고 볼 수 있다. 구성주의를 수학 교육의 실제에 적용하고자 하는 사람들은 수학적 지식이 외부의 강화에 의하여 학습자에게 전달될 수 있다는 견해에 동의하지 않는다. 즉, 구성주의자들은 지식이 학습자의 내면 세계에서 적절한 경험을 통해 자주적으로 구성된다고 생각하고 있으며, 이것은 곧 학생들이 수학 지식을 수동적으로 받아들임으로써 획득하는 것이 아니라 각자 능동적으로 재발명해 나감으로써 (수학 지식을) 구성하는 것을 뜻한다. 따라서 구성주의적 입장을 취하는 수학 교육 관계자들은 전통적인 방식의 수학 교육을 개선할 수 있는 하나의 대안으로서 구성주의적 수학 교육을 제안하고 있는 것이다. 특히 사회적 구성주의자들은 이제껏 전통주의자들의 주된 관심사였던 수학 지식의 실제에 대한 인식론적인 논의보다는 수학 지식에 대한 구성주의적 교수-학습의 가능성에 관심을 두었다.

'구성주의'는 그 말 자체가 광범위한 의미를 지니고 있을 뿐만 아니라 '구성'이라는 용어도 모호하기 때문에 이를 해석하는 견해가 다양하다. 그러나 현재 우리나라 수학 교과서에는 교구 및 소프트웨어 등의 조작 활동의 필요성, 개인별 능력 차를 고려한 수준별 교재의 필요성, 의사소통을 고려한 교과서 개발의 필요성 등의 반영이 절실히 요구되고 있다. 이러한 요구 사항은 조작적 구성주의자로 불리는 피아제의 발생적 인식론의 중심 아이디어인 '조작', 급진적 구성주의자들이 지식의 진리 자체에 관한 논의를 거부하고 초미의 관심사로 여긴 '개인 중심적' 구성이나 '생장 원리', 사회적 구성주의자들이 객관성을 사회성으로 대치하면서 도입한 사회적 합의의 수단인 '의사소통'을 교재 구성에 반영하자는 생각과 크게 다르지 않다.

02 구성주의적 수학과 교수-학습 원리의 반영

수학 교수-학습론의 원천으로서의 구성주의에서 수학 교육에 적용할 수 있는 유효한 교수-학습 원리는 다음과 같다.

가. 교과서에 학생 중심적 개별화의 원리 반영

구성주의의 기본적인 주장인 지식의 자주적 구성의 원리는 학생들로 하여금 갈등 국면에 대처하여 동화와 조절의 메커니즘에 따라 반영적 추상화의 과정을 통해 새로운 지식을 조정해 나가는 과정을 보여 주고 있다. 이것은 질문을 중심으로 하는 상호 작용적인 추측 및 논박에 의한 수학 교수-학습의 바탕(모델)이 된다. 구성주의는 지식의 자주적 구성을 그 근본 원리로 하고 있지만, 교수-학습의 차원에서 논의되는 지식은 '주관 독립적'인 의미에서의 객관적 지식이 아니라, 규약과 협정 등의 수단을 통하여 '공통 주관적'인 의미에서의 객관성을 가지게 된다.

따라서 수학 교육학적 구성주의에서 취하고자 하는 관점은 바로 공통 주관적인 의미에서의 객관적 지식은 학생 자신에 의해 자주적으로 구성되어야 한다는 것이며, 이러한 관점은 학생 자신에 의한 지식의 능동적인 재발명을 목표로 하는 오늘날의 수학 교육에서 요구되고 있는 관점과 일치한다고 볼 수 있다. 이를 위해서는 학생 중심적인 개별화 수업이 가능하도록 수학적 과제가 제시되어야 할 것이다. 학생이 스스로 생각하고 해결 전략을 궁리해 낼 수 있는 기회를 부여함으로써 학습자 자신이 다양한 사고를 할 수 있도록 해야 한다는 것이다.

나. 교과서에 질문 중심적 상호 작용의 원리 반영

학교 밖의 사회나 교사들은 지금까지 대체적으로 수학 지식의 가치를 인정하고 수학 교육의 당위성을 이해해 왔을지 모르지만, 아마도 학생들은 그러한 당위성을 이해하지 못하였을 것이고, 결과적으로 수학을 의미 없는 것으로 받아들일 수밖에 없었을 것이다. 그렇다면 유효한 수학 교육이 이루어지기 위해서는 학생들이 배워야 할 수학, 즉 학교 수학이 학생들에게 의미 있는 것이 되어야 함은 물론 수학 교수-학습 활동에 참여하고자 하는 학생들의 적극적 의지가 수반되어야 한다. 결국 이를 교과서에 반영하는 것은 질문 중심의 상호 학습이 일어날 수 있도록 과제를 제시하는 형태가 될 것이다. 구성주의에서는 교사와 학생 및 학생과 학생 사이의 상호 작용을 매우 중요시한다. 즉, 교사가 적절한 질문으로 학생의 응답을 유도해 냄으로써 학생들로 하여금 일련의 추측 및 논박 활동을 통해 수학 지식을 구성할 수 있도록 교수-학습 환경을 설정할 것을 요구하고 있다. 따라서 의미 지향적인 활동 수업이 이루어지도록 교과서가 구성되어야 할 것이다.

다. 교과서에 의미 지향적 활동의 원리 반영

위에서 살펴본 수학 지식의 자주적인 구성이 교수-학습에서의 학생의 의미 지향적 활동이나 교사의 적절한 질문만으로 가능한 것은 아니다. 학생에 의한 지식의 자주적 구성은 지식 구성을 하는 학습자 자신에 의해 내면적으로 이루어지는 자주적 활동 없이는 불가능하다. 다시 말해 효율적인 수학 교수-학습을 위해서는 학습자의 내면화된 자주적 활동이 학생의 교수-학습 활동에의 참여 의지 및 교사의 적절한 질문과 더불어 반드시 필요하다.

이때 이 내면화된 자주적 활동의 메커니즘을 구성주의가 설명해 주고 있는바, 이것이 바로 반영적 추상화이다. 그렇다면 학습자가 반영적 추상화의 과정을 경험할 수 있도록 교재가 구성되어야 함은 물론이다. 부연 설명하면, 교과서는 여러 가지 활동을 통하여 익힌 의미 있는 경험을 반성하여 자기 자신의 지식을 구성할 수 있도록 구현되어야 한다는 것이다.

03 구성주의적 관점에서의 교과서 개발 방향

위에서 살펴본 구성주의적 관점에 기초한 바람직한 수학 교과서를 구현하기 위하여 고려되어야 할 사항은 다음과 같다.

가. 교과서 저자의 철학

교과서에는 교과서 저자 나름대로의 철학이 배어 있어야 한다. 지금까지의 교과서에 제시된 교육과정상의 내용들은 누구나 합의할 수 있는 객관적이고 보편적인 것만을 다루도록 하는 것이 불문율이었다. 그러나 이제는 절대적 진리처럼 내용이 전개되던 교과서의 역할과 권위보다 학생들의 주체적인 사고의 참여를 촉발시킬 수 있는 '저자'의 역할과 권위를 우위에 두어야 할 것이다. 이때 교과서 저자는 자신이 왜 그러한 주제에 관심을 가지는지, 그것이 왜 중요한 것인지를 드러내고 어떻게 그 주제를 전개해 나아가는지 등에 관한 자신의 철학과 견해를 피력하고, 또 다른 견해들과의 차이를 드러내어 맥락화시킬 수 있도록 한다.

나. 안내형 교과서

전통주의적 입장에서의 교과서 방식은 학습 목표에서 추출된 세부적 요소들을 논리 정연하게 제시하는 '제시형 교과서'라고 할 수 있으며, 구성주의적 관점에서 보는 교과서는 교과서에 제시된 내용들에 학습자와의 실질적인 상호 작용을 통해서 그 의미가 발현될 수 있도록 소재적 가치를 부여하는 '안내형 교과서'라고 할 수 있다. 즉, 안내형 교과서는 학습하기를 기대하는 내용들을 직접 제시하는 대신 학습자로 하여금 구조적 변화를 경험하도록 안내하는 역할을 하는 내용으로 교과서를 구성하는 방식

을 취한다고 할 수 있다. 안내형 교과서는 개인적인 관심, 해석, 활동 등 학습자의 주체적인 역할에 큰 비중을 두고 학습자의 적극적이고 당사자적인 관여를 요청하고 있다.

이홍우(1997)는 “교과를 가르치되 학생의 경험과 의미 있게 관련되도록 가르쳐야 한다.”라고 주장하면서 학생들은 자신이 배우는 다른 내용들을 쉽게 이해하고 기억할 수 있을 뿐만 아니라 학교에서 배운 것을 다른 상황에 쉽게 적용할 수 있어야 한다고 하였다. 그러기 위해서는 날로 팽창하는 지식을 모두 가르치려고 할 것이 아니라, 그중에서 기본 또는 핵심이 되는 것만을 골라 가르쳐야 하며, 이와 같이 기본이나 핵심이 되는 것을 ‘지식의 구조’라고 명명하였다. 즉, 지식의 구조를 알면 팽창하는 모든 지식을 하나씩 따로따로 배우지 않더라도 그 기본적인 것에 비추어서 나머지를 쉽게 이해할 수 있다고 본 것이다.

다. 관계적 이해를 도모하는 교과서

기존의 교과서는 지극히 제한된 지면에 방대한 내용을 소개해야 하기 때문에 가능한 한 핵심적이고 확실한 원리나 개념들을 중심으로 간결하고 함축적인 방식으로 제시하고 있다. 이와 같이 주요 주제나 개념들을 피상적으로 제시하는 방식은 교사와 학생들로 하여금 ‘관계적 이해’를 도모하기보다는 수학적 언어와 기호를 이용하여 외우고 재생해 내는 데 급급하게 하는 ‘도구적 지식’을 가지도록 한다.

도구적 수학은 보통 이해하기가 더 쉬우며, 보다 적은 지식이 필요하기 때문에 학습 결과에 대한 보상이 즉각적이고 명백하다. 그러나 이 방식은 수학의 전체 영역에 서로 연결되는 기초적인 개념을 교수-학습하기보다는 서로 분리하여 각각의 주제를 교수-학습하는 것이기 때문에 기대하는 학습이 이루어진다고 보기 어려울 것이다.

반면 관계적 이해를 통한 학습은 마치 나무가 영양분을 찾아서 뿌리를 뻗어 나가거나 동물이 먹이를 찾아 새로운 지역을 탐험하는 것과 같이 능동적으로 새로운 자료를 찾고 새로운 분야를 탐구하는 것에 비유될 수 있다. 그러므로 관계적 이해를 촉구하기 위해서는, 즉 핵심적인 원리나 개념을 습득하게 하기 위해서는 그러한 내용을 얻을 수 있도록 해당 절차를 안내(유도)하는 방식으로 교과서를 구성하도록 한다.

라. 질문 중심의 개념 전개

기존의 교과서는 수학적 지식을 대부분 완성된 형태로 제시하는 하향식 전개 방식을 택하고 있다. 또한 단원의 마무리 단계는 기본 문제, 연습 문제, 종합 문제, 심화 문제 등으로 구성되어 있다. 따라서 계산이나 풀이 형식의 정착을 위해 학생들이 풀어야 할 문제들이 교과서에 산적해 있다. 이런 상황에서 학생들은 문제 풀이를 위한 반복 훈련을 하는 데 주력하게 되고, 교사 역시 이러한 기능을 정착시키기 위한 내용 전개로 수업을 이끌어 가는 경향이 있다.

이를 개선하기 위해서는 현재 교과서에 수록되어 있는 반복 연습형의 문제들을 줄이고 그 대신 수학적 개념과 문제 해결의 절차를 이해시키는 데 주력함으로써, 학생들에게 ‘수학을 한다.’는 것이 이미 배운 개념이나 공식, 절차를 바로 적용해서 연습 문제를 푸는 것이 전부가 아니라는 사실을 인식시켜야 할 것이다.

마. 수학적 유용성 강조

수학은 실제로 모든 학문의 기초로서 우리의 일상생활뿐만 아니라 공학, 의학, 경제, 사회, 문화 등 여타 분야에 지대한 영향을 미치고 있음에도 불구하고 이에 대한 인식이 부족하다. 지금까지의 교과서의 내용 및 그 전개 방식을 살펴보면 교사나 학습자로 하여금 여러 단원의 내용들이 서로 독립된 것이라고 오판하기 쉽게 되어 있다. 따라서 앞으로의 교수-학습 자료에는 단원 간의 내용 연계성을 강조함으로써 학생들 각자의 스키마를 구성하는 데 도움이 되도록 해야 할 것이다. 특히 교과서에

수학의 활용성에 대한 구체적인 내용을 단원별로 또는 전체적으로 기술하고, 과학이나 미술 등 다른 교과목과의 연결성을 찾는 내용도 포함시켜 학생들이 수학의 중요성을 알도록 해야 할 것이다.

바. 다양한 교구 및 도구 활용

수학 수업에서의 교구 사용은 추상적인 수학적 개념을 구체물로 모델링한다는 데 가장 큰 의의가 있으며 이를 통해서 학생들은 수학적 절차나 공식보다는 그 이면에 내재되어 있는 의미를 알 수 있게 된다. 또 교구는 학생들이 직접 만지면서 다루기 때문에 학생 중심적인 개별화 수업을 가능하게 할 뿐만 아니라 2～4명의 소집단 학습을 통하여 집단별 그리고 전체 토론이 이루어짐으로써 반영적 추상화를 경험할 수 있게 한다. 우리나라의 수학 교육과정은 컴퓨터와 계산기의 사용을 교사나 학교의 재량에 따라 사용하도록 권장하고 있다. 하지만 실제 학교 현장에서는 이들을 수업에 언제, 어떻게 활용해야 하는지를 잘 모르고 있는 실정이다. 그러므로 교수-학습 자료에 컴퓨터나 계산기 등의 활용 지침 및 방안에 대한 자세한 설명이 수록되어야 할 것이다.

04 수준별 수업의 운영

가. 수준별 수업의 운영 방식

수학과의 경우 수준별 수업은 1996년부터 현장에서 서서히 실시되기 시작하여 제7차 단계형 수준별 교육과정의 취지에 따라 더욱 활성화되었다. 수준별 수업과 예전의 단계형 수준별 교육과정의 운영은 그 접근 방법이 다르다고 할 수 있겠으나, 학생의 수준에 적합한 교육 내용을 다루고자 하는 점에서 기본 취지는 동일한 것으로 볼 수 있다.

2009 개정 교육과정에 따른 교과서는 기본 과정과 심화 과정의 학습 내용이 명료히 구분되어 제시되어 있지 않지만, 수준별로 개념 설명의 접근 방법을 차별화하고 해당 문제들의 난이도를 조정한다면 분단 수업이나 이동 수업을 진행하기가 용이할 것이다. 이렇듯 수준별 수업은 전통적으로 해 왔던 일제 수업의 폐단을 줄이고, 교사들의 다양한 교수-학습 자료 개발을 활성화시키며 학습자 주도의 학습의 중요성을 인식시키는 등 현장 교육을 긍정적으로 이끌 것이다.

이렇듯 수준별 수업은 학생의 성취 수준에 따라 수준별로 반을 편성하여 동일한 학습 진도 내에서 학습 심도를 달리하여 지도하는 '동진도-이심도' 방식을 취하는 것이 바람직하다. 이에 따라 수준별로 적합한 수업을 진행하기 위해서는 기본적으로 교육과정에 제시된 기본 학습 내용을 모든 수준의 학생들이 다루도록 하되, 각 수준별로 다루어야 할 학습 내용의 정도와 방법을 차별화하도록 한다. 〈표 Ⅲ-1〉 참조 이때 한 차시의 수업 내용을 기준으로 하거나 또는 교과서의 한 소단원을 기준으로 하여도 무방하다.

〈표 Ⅲ-1〉 수준별 수업 운영 방식

반 수준	수준별 수업 과정		
상	내용 수준	기본 내용	심화 내용
	수업 방식	개념 이해 → 단순 / 발전 과제 해결	발전 과제 해결
중	내용 수준	기본 내용	심화 내용
	수업 방식	개념 이해 → 단순 / 발전 과제 해결	단순 과제 해결
하	내용 수준	기본 내용	
	수업 방식	선수 학습 내용의 이해 → 개념 이해 → 단순 과제 해결	

나. 수준별 수업의 효율적 운영 방안

수준별 수업을 효율적으로 운영하기 위해서는 다음 사항에 유의해야 할 것이다.

(1) 학습자의 눈높이

개인차에 따른 학습 능력을 고려하여 수준별로 분단이나 학급을 편성하여 적절히 운영하여야 한다. 즉, 수준별 수업 운영을 위한 노력으로 우선 각 수준에 따라 수업 내용, 수업 진도 등이 적절한지 검토하여야 한다. 이때 무엇보다도 중요한 것은 수준별 수업을 위한 수업 내용, 수업 진도 등이 교사 또는 수학 교육 관련 전문가의 눈높이가 아닌 '학습자'의 눈높이에 맞춰져야 한다는 점이다.

(2) 내용의 차별화

수준별 개념에 입각한 교수-학습의 차별화는 수준에 따른 '학습 내용의 차별화'를 의미하는 것으로, '학습 내용의 차별화'란 각 수준별로 다루는 학습 내용 그 자체의 차별화를 말하는 것이다. 그런데 2009 개정 교육과정에는 학생들의 수준에 상관없이 모든 학생들이 공통으로 다루어야 하는 내용이 명시되어 있다. 그러므로 '학습 내용의 차별화'란 현행 교육과정에 기초한 공통 필수 격의 학습 내용을 모든 수준의 학생들이 다루도록 하되, 수준별로 중점을 두어 다루어야 할 '주요 내용'을 차별화하는 것으로 이해할 수 있다. 따라서 '문항의 난이도'뿐만 아니라 각 수준에 적합한 '내용의 차별화'에 기초를 둔 수준별 학습 자료가 개발되어야 할 것이다.

(3) 귀납적 학습법

수학 수업을 전개해 나가는 데 있어서 일반적으로는 개념 및 원리를 설명하고 이에 따른 예제를 푼 뒤 반복 연습 문제를 푸는 '연역적 방식'을 취하고 있다. 그러나 경우에 따라서는 예 또는 예제들을 통하여 그에 부합되는 학습 내용들을 체계적으로 정리하는 '귀납적 방식'을 취함으로써 학습의 이해를 보다 높일 수도 있다. 특히 학습 결손이 명백히 드러난 학생들에게 지극히 한정된 몇몇 문제의 풀이로 학습 내용을 이해시키기는 어렵다. 그러므로 각 수준별로 구체적인 예 또는 예제를 통하여 그에 부합되는 학습 내용(개념, 원리, 법칙 등)을 정리해 나가는 귀납적 방식의 수업도 병행해야 할 것이다.

(4) 소집단별 수행 과제 활동

수준별 능력에 따른 과제(open-response tasks)를 제시하여 학생들이 과제를 수행하면서 어떤 수학적 지식을 사용하고 또 어떻게 접근해 나가야 하는지 등에 관하여 스스로 탐색해 볼 수 있도록 해야 한다. 그러므로 45분의 수업 시간에 모든 활동이 이루어져야 한다는 제한된 시각에서 벗어나 수업 이외의 시간을 활용하여 좀 더 발전 지향적인 장 · 단기 과제를 다루는 것이 바람직할 것이다. 특히 소집단별 수행 과제 활동은 본인이 속한 집단의 구성원들과 그 결과를 기록하여 발표할 수 있는 '의사소통' 능력의 발휘가 가능하므로, 이를 통하여 다양한 자료를 수집, 표현, 분석, 해석함으로써 과제를 성공적으로 수행할 수 있도록 해야 할 것이다.

IV. 수학적 문제 해결

01 문제 해결의 의미

20세기 초에 이루어진 문제 해결에 대한 논의는 1960년대의 '새수학' 운동과 1970년대의 '기본으로 돌아가기' 운동과 같은 과정을 거치면서 크게 부각되지는 못하다가, 1980년대에 들어 기초 기능으로서의 문제 해결력에 대한 관심이 높아지기 시작하면서 부흥기를 맞게 된다. 미국의 수학교사협의회인 NCTM(1980)이 'An Agenda for Action'에서 문제 해결이 학교 수학의 초점이 되어야 함을 선언한 이래 1980년대는 문제 해결의 시대라고 할 만큼 이에 대한 다양하고 활발한 논의가 이루어졌다(황혜정 외, 2012, 재인용).

이 같은 문제 해결의 조류는 우리나라의 수학 교육과정에도 서서히 등장하였다. 제3차 교육과정에서 급격하게 도입되었던 수학 교육 현대화의 내용은 제4차 교육과정에서 경감되고 정선되면서 지나치게 어려운 내용보다는 수학의 기초적 기능을 배양하고 문제 해결력을 신장시키는 데 관심을 가지게 되었다. 이어 제5차 수학과 교육과정에서도 수학 내용을 정선하면서 문제 해결력의 신장을 강조하였으며, 제6차와 제7차 교육과정에서는 문제 해결력의 신장을 위한 지도 내용, 전략, 방법 등을 구체적으로 제시하여 문제 해결력의 지도가 보다 적극성을 띠게 되었다.

또한 2007 개정 교육과정에 이어, 2009 개정 교육과정 문서의 모든 교과목의 '교수－학습 방법' 부분에도 문제 해결에 관한 다음과 같은 내용이 명시되어 있다(교육과학기술부, 2011).

수학적 문제 해결력을 신장시키기 위하여 교수－학습에서 다음 사항에 유의한다.

(1) 문제 해결은 전 영역에서 지속적으로 지도한다.

(2) 학생 스스로 문제 상황을 탐색하고 수학적 지식과 사고 방법을 토대로 해결 방법을 적절히 활용하여 문제를 해결하게 한다.

(3) 문제 해결의 결과뿐만 아니라 문제 해결 방법과 과정, 문제를 만들어 보는 활동도 중시한다.

(4) 생활 주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상에서 파악된 문제를 해결하면서 수학적 개념, 원리, 법칙을 탐구하고, 이를 일반화하게 한다.

02 문제의 의미와 유형

가. 문제의 의미

문제 해결에서의 '문제'는 해결의 절차가 이미 알려져 있어서 단순히 계산 연습의 대상이 되는 문제보다는, 구체적이고 확실한 해결 방법을 쉽게 구하기 어렵고 문제 해결 과정에서 다단계에 걸친 다양한 사고가 요구되는 문제를 말한다. 예를 들어 문제 해결이라고 하면 이차방정식의 근의 공식을 배운 후에 근의 공식을 적용하여 주어진 이차방정식의 해를 구하는 것과 같이 배운 내용을 단순하게 적용하여 해를 구하는 연습 문제를 떠올릴지도 모른다. 그러나 최근 수학 교육에서 중요시되는 문제 해결은 이미 배운 수학적 사실이나 알고리즘을 단순히 적용하는 수준의 것이 아니다. 진정한 문제는 목표는 분명하지만 그 목표에 이르는 길이 즉각적으로 주어져 있지 않은 것이다. 문제의 해결에 이르는 알고리즘이나 풀이 방법이 이미 주어져 있거나 알려져 있다면 그 문제는 진정한 의미의 문제라고 보기 어렵다.

나. 문제의 유형

문제의 유형을 분류하는 데에는 여러 가지 견해가 있지만, 가장 보편적인 방법 중의 하나는 '정형 문제'와 '비정형 문제'로 구분하는 것이다.

■ 정형 문제(routine problems)

이미 제시된 알고리즘을 사용한다. 예를 들어 공식에 나오는 변수에 특정한 수를 대입하여 해결할 수 있는 문제나 전형적인 예제의 풀이 방법을 그대로 적용하여 해결할 수 있는 문제가 해당된다.

■ 비정형 문제(non-routine problems)

문제를 해결하는 알고리즘이나 답을 얻는 방법을 모르는 상태에서 문제 해결 전략이나 독자적인 해결 방법을 고안하여 풀어야 하는 문제를 말한다.

03 문제 해결 과정

폴리아(Pólya, 1957)는 수학적 문제 해결의 과정을 다음과 같이 4단계로 구분하여 제시하고 있다.

문제 이해 → 계획 작성 → 계획 실행 → 반성

다음 표는 문제 해결의 각 단계에서 교사가 사용할 수 있는 적절한 질문과 권고의 예이다.

〈표 Ⅳ-1〉 문제 해결 단계별 질문의 예

문제 해결 과정		해당 질문
문제 이해	문제를 이해하는 단계로, 문제에서 구하려는 것과 주어진 것을 알고 용어의 뜻을 파악하며 문제를 분석하는 단계이다.	• 미지인 것, 주어진 것은 무엇인가? • 자료는 무엇인가? • 조건은 무엇인가? • 그림을 그려 보고, 적절한 기호를 붙여라.
계획 작성	문제에서 주어진 것과 구하려는 것 사이의 관계를 파악하는 단계로 여러 가지 문제 해결 전략을 이용하게 된다. 구하려는 것과 주어진 것 사이의 관련성을 즉각적으로 발견할 수 없을 때에는 보조 문제를 고려해야 한다.	• 전에 그 문제를 본 적이 있는가? • 친숙한 문제 중에서 미지인 것이 같거나 유사한 문제를 생각해 보아라. • 유사한 문제는? • 문제를 푸는 데 필요한 조건을 모두 사용했는가?
계획 실행	해결 계획에 따라 실행하는 단계이다.	• 풀이의 각 단계를 조심스럽게 실행하도록 하라. • 각 단계가 올바른지 명확히 알 수 있는가? • 각 단계가 옳다는 것을 설명할 수 있는가?
반성	문제를 해결한 과정을 처음부터 검토해 보고, 다른 방법으로 해결할 수는 없는지 알아본 뒤, 혹시 다른 방법이 있으면 어느 방법이 더 나은지를 비교해 본다.	• 결과를 점검할 수 있는가? • 풀이 과정을 점검할 수 있는가? • 결과를 다른 방법으로 이끌어 낼 수 있는가? • 결과나 방법을 다른 문제에 활용할 수 있는가?

한편 문제 해결 전략이란 문제 해결에 도움이 되는 일반적인 절차나 해법의 단서가 되는 생각, 발견의 실마리를 얻도록 하는 방법 등의 사고 전략을 뜻한다. 크룰릭과 루드닉(Krulick, Rudnick, 1984)은 문제 해결 전략으로 패턴 찾기, 거꾸로 풀기, 추측과 검증, 모의실험, 환원, 목록 작성, 논리적 연역, 자료 정리(그래프, 방정식, 대수식, 표, 차트, 도식)를 제시하였으며, 그리노(Greeno, 1978)는 어림산, 단순화하기, 실험하기, 그림 그리기, 표 만들기, 그래프 그리기, 방정식 세우기, 규칙성 찾기, 순서도 구성, 판단 공간(decision-space)의 분할, 연역 논리로 문제 해결 전략을 구분하였다.

04 문제 해결의 예

다음에 주어진 문제를 폴리아(Pólya, 1957)의 문제 해결 4단계를 따라 풀어 보면 다음과 같다.

> 예 직사각형의 둘레의 길이가 35 cm이고 가로의 길이가 세로의 길이의 2.5배라고 하면, 가로의 길이는 얼마인가?

① 문제의 이해

문제에서 구하려는 것은 가로의 길이이며, 문제에서 주어진 것은 직사각형의 둘레의 길이가 35 cm이고 가로의 길이가 세로의 길이의 2.5배라는 사실이다.

② 계획 세우기

직사각형의 세로의 길이를 x라고 하면, 가로의 길이는 $2.5x$가 된다. 직사각형의 둘레의 길이는 네 변의 길이의 합과 같으므로 $x+2.5x+x+2.5x=35$

③ 계획의 실행

방정식을 풀면 $7x=35$, 즉 $x=5$이므로 가로의 길이는 $2.5\times5=12.5$(cm)이다.

④ 풀이의 반성

풀이 과정을 검토하여 잘못된 곳은 없는지 확인한다. 또 다른 방법으로도 문제를 해결할 수 있는지 조사한다. 이 문제의 경우 다음과 같이 풀 수도 있다.

가로의 길이가 세로의 길이의 2.5배이므로

$$(\text{가로의 길이}):(\text{세로의 길이})=2.5:1=5:2$$

이고, 둘레의 길이가 35 cm이므로

$$(\text{가로의 길이})+(\text{세로의 길이})=\frac{35}{2}=17.5$$

따라서 가로의 길이는 $17.5\times\frac{5}{7}=12.5$(cm)이다.

예와 유사한 문제를 다음과 같이 만들어 풀어 본다.

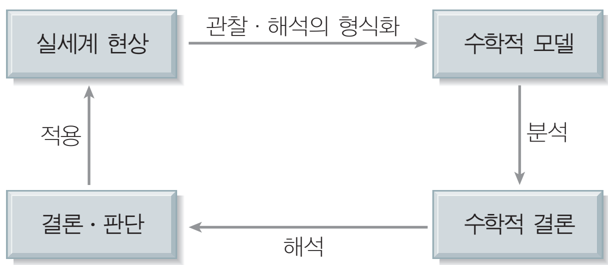
> 둘레의 길이가 35 cm인 직사각형의 가로의 길이가 세로의 길이보다 3 cm 더 길 때, 가로의 길이를 구하여라.

05 문제 해결 과정과 수학적 모델링

가. 문제 해결 과정과 수학적 모델링

수학적 모델링은 문제 해결의 특징을 지니지만, 비수학적 문제 상황에서 출발하는 것을 기본으로 한다는 점에서 문제 해결과 차별화된다(NCTM, 1991). 즉, 수학적 모델링은 비수학적 대상에서 수학적 표상을 찾는 것으로, 대상이나 체계 또는 과정의 중요한 특징을 이루는 수학적 구조나 이론을 세우는 것을 말하며, 어떤 현상에 관한 문제를 해결하기 위하여 원래의 문제 상황을 수학적으로 표현하는 수학화의 과정을 중시한다. 특히 한 체계에서의 개념이나 문제 상황을 다른 체계로 번안하여 내면화하거나 해결해 가는 과정은 모델링 과정의 전이가 쉽게 일어나도록 할 수 있음을 의미한다. 또한 수학적 모델링은 수학과 다른 과목 또는 일상생활과의 연결성을 강조한다. 이것은 수학 학습의 초점이 완결된 지식의 획득이 아니라 지속적인 모델의 구안과 수정을 통한 본 개념의 이해에 맞추어져야 함을 의미한다.

일상생활에서의 경험이 모델링 과정을 통해 수학적으로 재조직될수록 한 체계에서 다른 체계로 쉽게 전이되어 요소들 사이의 관계 구조의 파악이 용이하고, 이를 바탕으로 실세계에서 제기된 문제를 해결할 수 있다. 수학적으로 의미 있는 모델을 구성하는 모델링 과정은 4단계의 순환 과정으로 구성되며, 이를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



[그림 Ⅳ-1] 수학적 모델링 과정(NCTM, 1991)

NCTM(1991)의 '*Mathematical Modeling in the Secondary School Curriculum*'에서는 수학적 모델링 과정을 다음과 같이 설명하고 있다.

① 현상을 관찰하여 그 현상에 내재되어 있는 문제 상황을 명료히 밝히고, 문제에 중요한 영향을 미치는 요인들을 찾는다.
② 요인들의 관계를 추측하고 그 요인들을 수학적으로 해석하여 현상에 적합한 모델을 구축한다.
③ 적절한 수학적 분석을 구축한 모델에 적용한다.
④ 결과를 얻어 내고 그 결과를 현상에 맞도록 재해석하여 결론을 도출한다.

요약하면 수학적 모델링은 실세계의 여러 현상을 수학적인 수단에 의해 정리하고 조직하는 활동으로, 문제를 해결하기 위하여 여러 가지 수학적 표현으로 변환하면서 현상에 내재된 수학적 개념을 파악, 문제를 해결하여 실세계의 문제 상황에 적용할 수 있도록 하는 활동 과정이다. 이러한 수학적 모델링을 통한 수학 학습은 새로운 수학적 개념을 도입하거나 이미 개발된 수학적 개념을 새로운 상황에 적용하는 데 유용하여, 중요한 수학적 아이디어와 문제 해결 과정에 강력한 수단이 된다. 따라서 수학적 모델링을 통하여 수학 교육에서 다음과 같은 목적을 달성할 수 있다(Niss, 1989).

- 새로운 수학적 개념과 방법을 이해한다.
- 실생활 또는 다른 교과에서의 수학의 응용과 모델링의 실제를 이해한다.
- 창의적 사고와 문제 해결 태도, 활동, 능력을 기른다.
- 수학을 활용하여 실생활 또는 다른 교과와 연결된 맥락을 비판적이고 합리적으로 사고하는 태도를 기른다.
- 수학이 이미 완성된 산물이 아니라, 인간 활동의 결과로 만들어지고 있는 것임을 이해한다.

나. 수학적 모델링의 예

연못에 있는 물고기의 수를 조사하는 다음 상황을 통해 수학적 모델링을 살펴보자.

(1) 문제 상황

이 게임의 목적은 연못에 있는 물고기의 수를 알아내는 것이다. 이러한 정보는 연못을 관리하고 물고기에 대해 파악하는 데 도움을 줄 것이다. 연못에 있는 물고기의 수를 어떻게 추측할 수 있겠는가?

(2) 필요한 수학 개념

비와 비율

(3) 모델

우리는 연못에 있는 물고기의 수를 알 수 없으므로, 물고기의 수를 n마리라고 하자.

우선 몇 마리의 물고기를 잡아 물고기가 다치지 않게 꼬리에 표를 달고, 다시 그 물고기들을 연못에 놓아준다고 가정하자. n마리 중에서 p마리를 잡아 표시를 하고, 며칠 후에 q마리의 물고기를 잡는다면 그중에는 꼬리표를 단 것도 있고 달지 않은 것도 있을 것이다. 이때 꼬리표를 단 물고기의 수를 x라고 하면, 다음과 같은 식이 성립한다.

$$\frac{p}{n}=\frac{x}{q}$$

p, x, q 모두 측정값이므로, n의 값을 구할 수 있다.

다음은 앞과 같은 활동을 10번 시행한 예이다.

표본 채취 순서	꼬리표를 단 물고기의 수	표본 수
1	3	15
2	0	15
3	3	15
4	1	15
5	2	15
6	4	15
7	6	15
8	2	15
9	4	15
10	2	15

이때 좀 더 정확한 n의 값을 구하기 위해서는, x의 평균 $\overline{x}$를 구하여 다음과 같은 식을 세울 수 있다.

$$n=\frac{pq}{\overline{x}}$$

예를 들어 처음에 표시한 물고기의 수(p)가 10마리이고 다섯 번 표본을 채취했다면, $\overline{x}=1.8$, $p=10$, $q=15$이므로 $n=83$이다.

위와 같이 연못에 있는 물고기의 수를 측정하는 이러한 과정을 'the capture/recapture' 방법이라고 하며, 이것은 게임으로도 사용되고 보존청에서도 활용되고 있다.

V. 수학과 평가의 특징 및 방법

01 수학과 평가의 동향

1990년대 초 미국 NCTM의 대안적 평가의 강조를 기점으로, 우리나라에서도 1995년 교육개혁위원회 주체의 '세계화 · 정보화 시대를 주도하는 신교육체제 수립을 위한 교육개혁방안' 수립, 1997년 서울시교육청의 초등학교 새물결 운동, 1997년 제7차 교육과정 개정 등의 영향으로 학교 현장에 수행 평가가 점차 반영되기 시작하였다. 결과적으로 우리나라에서도 전통적인 평가 방식의 변화 및 개선의 필요성이 인식되면서 새로운 평가 방법의 도입이 요청되고 이를 위한 대안으로 학교 현장에의 수행 평가 도입 및 활성화 방안이 추진되었으며, 이는 현재까지 지속적으로 강조되고 있다.

이에 대한 실례로 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정의 모든 교과목에서의 평가 부분은 다음과 같이 진술되어 있다(교육과학기술부, 2011).

가. 수학 학습의 평가는 학생의 인지적 영역과 정의적 영역에 대한 유용한 정보를 제공하고, 학생 개개인의 수학 학습과 전인적인 성장을 돕고 교사의 수업 방법을 개선하는 데 활용되어야 한다.

나. 수학 학습의 평가에서는 학생의 인지 발달 단계를 고려하고, 교육과정에 제시된 내용의 수준과 범위를 준수한다.

다. 수업의 전개 국면에 따라 진단평가, 형성평가, 총괄평가 등을 적절히 실시하되, 지속적인 평가를 통하여 다양한 정보를 수집하고 수업에 활용한다.

라. 수학 학습의 평가에서는 선택형 위주의 평가를 지양하고 서술형 평가, 관찰, 면담, 자기 평가 등의 다양한 평가 방법을 활용하여 수학 학습에 대한 종합적인 평가가 이루어질 수 있게 한다.

마. 인지적 영역에 대한 평가에서는 학생의 수학적 사고력 신장을 위하여 결과뿐만 아니라 과정도 중시하여 평가하되, 수학의 교수-학습에서 전반적으로 요구되는 다음 사항을 강조한다.

(1) 수학의 기본적인 개념, 원리, 법칙을 이해하고 적용하는 능력

(2) 수학의 용어와 기호를 정확하게 사용하고 표현하는 능력

(3) 수학적 지식과 기능을 활용하여 추론하는 능력

(4) 다양한 상황에서 발생하는 여러 가지 문제를 수학적으로 사고하여 해결하는 능력

(5) 생활 주변 현상, 사회 현상, 자연 현상 등의 여러 가지 현상을 수학적으로 관찰, 분석, 조직하는 능력

(6) 수학적 사고 과정과 결과를 합리적으로 의사소통하는 능력

(7) 수학적 지식과 기능을 바탕으로 창의적으로 사고하는 능력

바. 정의적 영역에 대한 평가에서는 학생의 수학에 대한 긍정적 태도를 신장시키기 위하여 수학 및 수학 학습에 대한 관심, 흥미, 자신감, 가치 인식 등의 정도를 파악한다.

사. 수학 학습의 평가에서는 평가하는 학습 내용과 방법에 따라 학생에게 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구와 다양한 교구를 이용할 수 있는 기회를 제공한다.

이상의 내용을 중심으로 우리나라 수학과의 평가 동향을 간략히 살펴보면, 우선 평가를 통하여 학생에 대한 등급을 매기기보다는 학생과 교사에게 도움을 주는 것이 강조되어 있으며, 최종 결과의 평가보다는 과정에 대한 평가를 강조하고 있다. 또한 객관식 선다형 위주의 평가를 지양하고 주관식 지필 검사, 관찰, 면담 등 다양한 평가 방법을 활용하여 종합적인 수학 학습 평가 등을 권장하고 있다. 특히 최근 들어 인지적 영역에 대한 평가뿐만 아니라 정의적 영역에 대한 평가도 점차 강조되고 있다. 아울러 평가 상황에서도 계산기, 컴퓨터와 같은 공학적 도구 및 교구의 적절한 이용을 권장하고 있음을 알 수 있다.

02 수학과 평가의 원리

학교 수학에서의 평가는 주로 교수–학습 방법의 개선을 위하여 이루어져야 하는데, 그동안 평가는 수준 판정 및 선발의 목적을 달성하는 데 치중해 왔다. 이로 인해 평가는 학생들에게 도움을 주기보다 많은 심적인 부담을 안겨 주었으며, 그러한 평가 결과는 교사의 수업 방법을 반성하고 개선하는 데 그다지 활발히 활용되지 못하였다. 또 지식을 측정하는 지필 검사가 전적으로 활용되고, 창의력, 탐구력과 같은 고등 정신 능력과 흥미, 관심, 열의와 같은 정의적 능력을 평가할 수 있는 다양한 평가 방법이 활용되지 못하였다. 이렇듯 잘못된 평가 방식은 교육 본연의 모습을 그르칠 수도 있지만, 반대로 올바른 평가 방식은 교육 본연의 모습을 찾는 데 절대적인 영향을 미친다. 이에 따라 수학 교과에서 점차 지향되고 있는 평가의 동향이나 특징에서 알 수 있는 바와 같이, 수학과 평가가 바르게 이루어지기 위해서는 다음과 같은 기본 원리가 지켜져야 한다(황혜정 외, 1997).

가. 발달적 교육관을 중시하는 평가

평가는 그 방향과 방법에 영향을 주는 기준하에서 선발적 교육관과 발달적 교육관으로 대별할 수 있는데, 발달적 교육관에서의 교육 평가는 학생의 선발이나 개인차를 내는 데 관심이 있는 것이 아니라, 모든 학생이 가능한 한 의도하는 바의 수업 목표를 달성할 수 있도록 모든 학습자에게 적절한 학습 방법을 배치하기 위한 평가를 하게 된다. 또한 학생 간의 서열과 개인차를 내기 위한 평가 방법보다는 주어진 수업 목표를 어느 정도 달성하였는가 하는 수업 목표 달성도의 평가에 그 관심이 집중된다.

발달적 교육관은 준거지향평가의 관점으로 귀결된다고 할 수 있다. 평가의 목적에 따라서 상대평가를 하여야 할 때가 있고, 준거지향평가를 하여야 할 때도 있다. 그러나 수학과 평가가 수학적 능력을 신장시킨다는 목적을 달성하기 위해서는 교사가 선발적 교육관보다는 발달적 교육관을 지녀야 한다. 그럼으로써 교사는 교육 목표의 달성도와 학생의 학습 과정에 더욱 관심을 기울이고 자신의 수업 방법과 평가 방법에 대해 보다 반성하며 학생 개개인에 적합한 교수–학습 방법을 적용할 수 있다.

나. 다양한 평가 방법을 수반하는 평가

그동안 수학 교과에서 다양한 평가 방법이 사용되지 못한 주된 이유는 교사에게 주는 부담, 그리고 다양한 평가 방법을 활용할 수 있는 다양한 형태의 수업을 하는 데 교사가 익숙하지 못하기 때문이다. 또 수학에서는 지필 검사만으로도 학생들의 수학적 능력을 충분히 평가할 수 있다는 잘못된 인식 때문일 수도 있다. 그러나 지필 검사만으로는 다양한 상황에서 다양하게 표현되는 수학적 능력을 종합적으로 바르게 평가할 수 없다. 수학이 타 교과목과는 다른 특성을 지니고 있다고 하더라도, 수학적 능력 역시 다양한 평가 방식을 통해서 바르게 평가될 수 있다. 이제까지의 일상적인 수업 방법을 탈피하여 학생들의 수학적 사고를 자극하는 새로운 수업 방법을 적용하여 보고, 또 이에 부합하는 새로운 방법으로 평가를 해야 할 것이다.

다. 문제 해결 과정을 중시하는 평가

현재의 수학과 평가에서는 정 · 오답 여부, 점수, 석차 등이 중요시되고 있으며, '학생이 어떠한 사고 과정을 거쳐서 이 문제를 해결하였는가?', '학생이 사고 과정에서 어떤 오류를 범해서 문제를 풀지 못하였는가?'는 중요시되지 않는다. 이는 다인수 학급에서의 평가의 효율성, 선발적 교육관, 상대적 평가관이 중요시되는 분위기 때문이다. 그러나 이러한 평가 방식이 계속 적용되면 학생은 사고 과정, 문제 해결 과정의 타당성보다 정 · 오답 여부에만 신경을 쓰기 때문에 학생의 수학적 사고 능력, 문제 해결력은 향상되지 못한다. 또 교사는 학생 개개인이 지닌 사고 과정의 결함을 알 수 없기 때문에 그러한 결함들이 발견되어도 치유되기 어렵다. 교사 역시 자신의 교육 방법을 반성해 가면서 학생을 지도할 기회를 가지기

어렵다. 그러므로 이러한 일을 가능하게 하려면 다양한 풀이 과정과 방법이 공유되는 해결(또는 수행) 과정을 중요시하는 평가가 이루어져야 할 것이다.

라. 정의적 영역의 능력을 중시하는 평가

정의적 영역의 평가는 수학적 지식 및 기능에 관한 인지적 영역의 평가 못지않게 중요하다. 학생이 가지는 수학적 성향은 그가 수학에 계속적으로 관심을 가지고 공부를 하며, 높은 성취를 이룰 수 있을 것인지를 판단하는 중요한 준거가 된다. 최근 들어 우리나라에서도 정의적 영역에 대한 평가의 중요성이 점차 인식되고 있다. 이는 우리나라 학생들이 국제 학업성취도 비교 평가에서 수학 학업성취 수준은 세계 최상위권임에도 불구하고, 정의적 수준은 최하위권인 것으로 나타났기 때문이다. 많은 학생들이 수학은 재미없고 어려운 과목, 일상생활에 도움이 안 되는 과목, 대학 입시를 위한 과목 등 매우 부정적인 교과로 인식하고 있는 것으로 나타났다. 이는 우리 사회에 큰 우려감을 주고 있으며, 이에 대한 개선책이 요구되고 있다(박선화 외, 2010).

그럼에도 불구하고 우리의 현실에서 정의적 영역에서의 평가가 제대로 이루어지고 있지 않은 이유는 평가에서의 주관성과 교사의 주관적 판단을 중요하게 여기지 않고 신뢰하지 못하는 분위기, 평가상의 번거로움, 교사들이 쉽게 이용할 수 있는 평가 도구나 자료의 부족 때문이다. 이에 따라 교사의 주관적 판단의 중요성을 인식하고 그것을 신뢰하며, 평가상의 번거로움을 최소화하고, 교사들이 손쉽게 이용할 수 있는 관찰 또는 면담지 등의 평가 도구가 개발되고 제공된다면, 정의적 영역에 대한 평가도 보다 활성화될 수 있을 것이다.

여기서 수학에 대한 정의적 특성의 의미와 구성 요소를 간단히 살펴보면 다음과 같다. 한국교육과정평가원(박선화 외, 2010)에서는 수학에 대한 정의적 특성을 수학에 대한 경험으로 인하여 형성된 정서, 신념, 동기 등을 포함하는 심리적 특성으로 정의하여 제시하였다.

〈표 Ⅴ-1〉 수학에 대한 정의적 특성의 요소

범주	하위 요소	정의
정서: 비교적 강하게 단시간 동안 계속되는 감정. 희노애락, 애증, 공포, 쾌감 등	흥미	교과나 학습 주제 등에 대해 주관적으로 느끼는 선호도 및 학습 활동에 참여함으로써 발생하는 즉각적인 재미
	호기심	지속적이면서 일관되게 새로운 것을 추구하는 개인의 심리적 경향성
	수학 불안	수학 교과 자체 또는 수학과 관련된 일이나 문제 등에 대하여 긴장하고 두려워하거나 걱정하고 염려하는 심리 상태
신념: 어떤 아이디어, 사건, 행위 등과 같은 대상에 대해 여러 반응을 시도하고 다양한 시행착오의 과정을 반복하면서 형성된 가치 체계	수학관	문화적 가치와 사회적 기대를 경험과 학습을 통하여 내면화한 것으로 수학이 가지고 있는 교과로서의 특성과 그에 적절한 학습 방법에 관한 개인적인 관점
	가치 인식	사회적 맥락이나 학습자 자신의 삶의 맥락과의 관계 속에서 수학의 기능과 유용성에 대한 평가
	귀인	수학과 관련된 성공과 실패의 원인에 대한 개인적 지각으로 원인의 소재(내적 · 외적 요인), 안정성, 통제 가능성에 대한 추론
동기: 학습 활동을 유발하고 지속하게 하는 힘으로서 학습 활동을 의미 있고 가치 있는 것으로 보고 학습 활동으로부터 의도된 가치를 얻고자 하는 경향성	목표 지향성	성취 상황에서 개인이 과제를 수행하는 목표에 대한 개인의 지향성으로, 타인과 비교하거나 자신의 능력을 타인에게 증명하기 위한 목표인 수행 목표와 과제의 숙달이나 능력을 향상하기 위한 목표인 숙달 목표로 구분됨
	자기 효능감	목표 달성에 필요한 행동 과정을 조직하고 행하는 자신의 능력에 대한 믿음으로, 특정한 시간에 주어진 특정 과제를 잘 수행할 수 있는지에 대한 인식
	자기 조절력	개인적 목표 설정과 설정한 목표를 성취하기 위한 행동 조정으로, 장기적 목표 달성을 위해 바람직한 행동을 추구하고 그렇지 않은 행동은 억제하여 충동적이거나 즉각적이지 않고 스스로 문제를 신중하게 계획, 해결, 평가하려는 경향성

03 수학과 평가 절차

평가는 상황에 따라 다양한 형태로 시행되므로 모든 상황에 적용 가능한 평가 절차를 규명하기란 쉽지 않다. 하지만 교사가 평가 주체자가 되어 학생들의 수학적 능력이나 태도를 평가하는 경우에 초점을 두어, 평가 시행을 위한 기본 절차를 그림으로 나타내면 다음과 같다.

평가 목적 설정
↓
평가 목표 및 영역 설정
↓
평가 틀 개발(평가 방법 선정)
↓
평가 도구 개발
↓
평가 실시
↓
채점 및 결과 보고

[그림 Ⅴ-1] 수학과 평가의 기본 절차

평가를 하고자 할 때 가장 먼저 고려해야 할 것은 '어떤 목적으로 평가를 할 것인가'를 결정하는 일이다. 진단평가나 형성평가와 같이 교사가 자신의 수업에 대한 피드백을 얻기 위한 목적으로 평가를 실시한다면 수업을 진행하기 전이나 진행하는 도중에 평가를 실시하여 그 결과를 수업 개선에 활용하게 될 것이다. 반면 총괄평가와 같이 학생들의 성취 정도에 따라 등급을 결정하는 것이 목적이라면 보다 객관적인 평가 방법을 이용하며, 평가의 내용도 한 학기 또는 일 년 동안 학생들이 학습한 전체 내용을 포괄하는 것이 더 타당할 것이다. 이처럼 평가의 목적에 따라 평가 내용, 방법, 시기 등 진행되는 평가의 전체적인 모습이 달라지므로, 우선 평가를 하고자 하는 목적부터 염두에 두어야 할 것이다.

두 번째 단계에서는 첫 번째 단계에서 결정한 평가 목적에 따라 평가하고자 하는 영역(이하 평가 영역)을 설정하고, 해당 영역의 주요 교육 목표가 무엇인지 확인하여야 한다. 이때의 교육 목표는 각 문항에 대한 구체적인 평가 목표를 뜻하는 것이 아니라 교육과정의 목표 및 내용에 준하여 해당 평가 영역의 교육 목표를 설정하는 것을 말한다.

세 번째 단계에서는 균형 있는 평가 도구 개발을 위하여 평가 틀을 개발하는 것이다. 평가 틀은 평가 영역의 교육 목표를 분석하여 이를 잘 반영할 수 있도록 설정된 행동 영역과 내용 영역, 평가 목표, 평가 문항 유형, 각 요소별 문항 출제 비율 등을 포괄적으로 포함한다.

또한 이때 평가하고자 하는 목적, 평가하고자 할 영역, 그리고 그 영역에 해당하는 교육 목표를 토대로 이에 부합하는 평가 방법을 선정하여야 할 것이다. 예를 들어 총괄평가를 실시할 목적으로 특정 평가 영역을 선정하여 해당 교육 목표가 확인되었을 때, 인지적 영역 능력에 관한 평가를 실시하기 위해서는 이에 부합하는 평가 방법을, 정의적 영역 능력에 관한 평가를 실시하고자 할 경우에는 이에 따른 적절한 평가 방법을 사용해야 할 것이다.

네 번째 단계는 위의 세 번째 단계를 통해 마련된 평가 틀에 부합하는 평가 도구를 개발하는 과정이다. 평가 도구 개발 시에 문항의 양호도, 검사 시행의 시간 소요 등을 고려하여 문항을 개발하고 그에 따라 모범 답안 및 채점 기준도 개발하여야 한다. 이때 '평가 도구 개발'이란 인지적 영역의 평가에서 지필 검사를 위한 평가 문항 개발, 채점 기준 및 예상 답안 작성과 정의적 영역에서의 평가를 위한 평가(주로 관찰 및 면담) 요목 개발, 기록 방법 작성 등을 총체적으로 일컫는 말이다.

다섯 번째 단계에서는 평가를 실시하고, 가채점을 통하여 사전에 준비한 채점 기준 및 예상 답안의 적절성을 검토하여 이를 수정 · 보완한 후, 이를 참고로 하여 실제적인 채점에 임하도록 한다.

마지막 단계로는 평가 목적에 따라 적절한 방법으로 기록하여 그 결과를 보고하도록 한다.

04 수학과 평가 틀 개발 시 유의 사항

학교 수학에서 수학 교육 목표를 내용과 행동 수준에 맞추어 평가하는 것은 바람직한 일이며, 이를 위해서는 수학과에 적합한 평가 틀을 마련하여야 한다. 평가 틀은 평가 도구 개발 및 평가의 전 과정에서 평가 방향과 평가 관련 항목을 선택하거나 결정할 때 판단의 준거가 된다. 평가 틀은 평가에 관한 보다 체계적이고 포괄적인 구조를 설명할 수 있다는 장점과 더불어 평가 문항과 내용 및 행동 영역의 적합성을 판정하고 설명하는 데 용이하다고 할 수 있다. 〈표 Ⅴ-2〉, 〈표 Ⅴ-3〉 참조

수학과 평가 틀을 개발하는 데 있어서 고려해야 할 제한 사항은 다음과 같다.

첫째, 일반적으로 평가의 목적은 우수 학생을 선발하려는 것이 아니고 학생들의 교육 성취 정도(수준)가 얼마나 되는지, 그리고 각각의 수준에 도달한 학생들이 얼마나 되는지 파악하는 데 있으므로 평가 틀이 학생들의 성취 수준을 골고루 측정해 낼 수 있도록 세워져야 한다. 그러므로 가장 기초가 되는 수준에서부터 우수한 학생까지의 성취 정도가 잘 드러날 수 있도록 다양한 수준의 문항으로 구성되어야 한다.

둘째, 가능하면 평가 요소를 적어도 내용 영역과 행동 영역으로 이원화하도록 한다. 특히 행동 영역을 설정하여 소홀하기 쉬운 '지식의 활용 또는 적용' 능력에 의미 있는 비중을 두도록 한다. 동시에 폭넓은 수준의 학업 성취의 정도를 파악할 수 있도록 행동 영역을 가장 기초적인 지식이나 단순 계산에서부터 보다 복합적인 사고를 요구하는 탐구나 문제 해결 능력까지 평가의 대상으로 삼아, 학생들이 어느 영역에 더 높은 성취를 보이는지 파악할 수 있도록 한다.

셋째, 평가 틀의 구성에 있어서 시대적 요구가 강한 행동 영역을 의도적으로 평가 틀에 포함시키도록 한다. 예를 들어 의사소통 능력과 같이 시대적으로 강력히 요구되고 있으면서도 실제 학교 현장에서는 소홀히 다루어지는 능력을 평가 틀에 과감히 도입함으로써 학교 교육과정 운영에 있어서 선도적 역할을 기대해 볼 만하다.

〈표 Ⅴ-2〉 수학과 평가 틀의 예

행동 영역 / 내용 영역	계산	이해	추론	문제 해결
수와 연산				
문자와 식				
함수				
확률과 통계				
기하				

〈표 Ⅴ-3〉 수학과 평가 틀에서의 인지적 행동 영역의 정의

행동 영역	정의
계산	여러 가지 계산법, 나아가 문제 해결에 이르기 위한 명확한 절차, 즉 알고리즘을 능숙하게 구사할 수 있는 능력에 관한 것
이해	기본적인 수학적 개념, 원리, 법칙 및 그 관련성을 이해하여 의미 충실한 개념적 사고를 형성할 수 있는 능력에 관한 것
추론	• 관찰, 열거, 실험 등을 통한 귀납과 유추, 추측에 의해 수학적 법칙과 문제의 해법을 발견할 수 있는 능력에 관한 것 • 조건명제의 증명, 삼단논법에 의한 연역적 추론, 반례에 의한 증명, 간접증명법, 모순법, 동치인 명제의 증명, 수학적 귀납법 등을 이용한 증명을 읽고 이해할 수 있으며, 이러한 방법을 사용하여 수학적 명제를 증명할 수 있는 능력에 관한 것
문제 해결	• 수학의 여러 가지 내용 사이의 개념, 원리, 법칙 등의 관련성이 요구되는 수학 내적인 문제를 해결할 수 있는 능력에 관한 것 • 수학과 일상생활 및 타 교과 내용과의 관련성의 파악이 요구되는 통합 교과적(수학 외적)인 소재의 응용 문제를 해결할 수 있는 능력에 관한 것

05 서술형 및 수행 평가 문항의 채점 방법

서술형 또는 수행 평가 문항 등에서 학생들은 문제(질문 내용)조차 이해하지 못하는 경우, 문제는 이해했으나 풀이 과정이 틀린 경우, 또는 풀이 과정은 옳으나 계산 과정이 미흡하여 실제로 결과를 나타내는 부분이 틀린 경우 등 여러 가지 반응을 나타낸다. 실제로 학생들의 문제 풀이를 평가하는 데 있어서 가장 어려운 부분은 여러 가지 유형의 오류들을 드러내는 풀이를 어떻게 평가할 것인가를 결정하는 일이다. 이때 풀이 과정을 중시하여 채점하는 방법으로는 '분석적 점수화 방법'과 '총체적 점수화 방법'을 들 수 있다(Charles, et. al., 1987).

먼저 '분석적 점수화 방법'이란 주어진 문제를 해결하는 데 필요한 단계(과정)를 구체화하여 각 단계별로 채점 요소를 세우고 점수를 배당하는 방법을 말한다. 이때 어떤 특정 요소에 대한 채점 결과가 다른 요소에 대한 채점 결과에 영향을 주어서는 안 되며, 각 문항마다 채점 요소를 지나치게 세분화하지 않도록 한다. 분석적 점수화 방법은 학생 개개인의 답안지를 면밀히 분석해야 하므로 채점하는 데 많은 시간을 필요로 하지만, 주어진 문제의 해결 과정에 따라 단계별로 수치화한 점수를 부여함으로써 채점자 간의 평점 차를 줄이고 동일한 채점자 내에서도 일관성 및 객관성을 유지할 수 있다는 것이 주요 장점이다. 한편 '총체적 점수화 방법'이란 주어진 문제를 해결하는 데 필요한 특정 내용이나 과정에 대하여 각각 점수를 부여하는 대신, 풀이 전반에 걸쳐 하나의 점수를 부여하는 방법을 말한다.

서술형 및 수행 평가 문항의 채점을 위한 채점 기준은 주로 분석적 점수화 방법을 토대로 문제 이해, 문제 해결 과정, 답 구하기 등의 과정이 반영되도록 작성한다. 이를 작성하는 과정에서 각 문항의 배점과 채점 요소별 배점은 평가 목적이나 목표에 따라 적절히 부여하도록 한다. 다음은 서술형의 문항에 대한 채점 기준을 분석적 점수화 방법으로 제시한 예이다.

【문항】

작년에 A 중학교의 학생 수는 1050명이고, 금년에는 작년보다 남학생은 $4\,\%$ 증가하고 여학생은 $2\,\%$ 감소하여 전체적으로 9명이 증가했다. 금년의 남녀 학생 수를 각각 구하여라.

【모범 답안】

작년의 남학생의 수를 x, 여학생의 수를 y라고 하면

$$\begin{cases} x+y=1050 \\ \frac{4}{100}x-\frac{2}{100}y=9 \end{cases}$$

이므로 $x=500$, $y=550$이다.

따라서

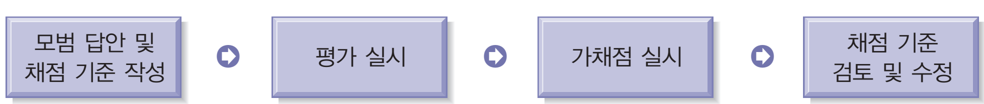
금년의 남학생의 수: $500+\frac{4}{100}\times500=520$(명)

금년의 여학생의 수: $550-\frac{2}{100}\times550=539$(명)

【채점 기준】

요소 / 영역	채점 요소	배점
문제 이해	작년의 남학생 수를 미지수로 정하기	1점
	작년의 여학생 수를 미지수로 정하기	1점
해결 과정	작년의 학생 수에 관한 식 세우기	1점
	작년보다 늘어난 금년의 학생 수에 관한 식 세우기	3점
답 구하기	금년의 남학생 수 구하기	2점
	금년의 여학생 수 구하기	2점
총점		10점

서술형 및 수행 평가 문항에 있어서 모범 답안은 채점 기준을 작성하는 데 있어서 구체적인 지침의 역할을 한다. 문항의 특징이나 성격에 따라 다르겠지만, 일반적으로 수학 교과의 특성상 피험자가 다양한 창의성을 발휘하여 평가자가 생각하지도 않았던 여러 가지 형태의 답을 제시할 가능성은 그리 높지 않다. 하지만 서술형 문항의 경우에는 답안을 작성하는 과정에서 실수나 오답의 가능성이 높으므로 이에 관한 채점 기준을 마련하여 채점 결과의 공정성을 유지해야 할 것이다. 이에 따라 모범 답안과 그에 따른 채점 기준을 구체적으로 마련하고 평가를 실시한 후 이미 작성된 채점 기준(안)을 토대로 일부 학생들의 실제 답안을 '가채점'하는 일은 매우 중요하다고 하겠다. 이는 채점 기준의 요소 중에서 채점자(교사)가 미처 생각하지 못하였던 채점 요소나 부적절하게 배당된 요소별 점수가 있는지를 검토하고, 미비한 부분을 보완·수정하기 위함이다. 위와 같은 절차를 그림으로 나타내면 다음과 같다.

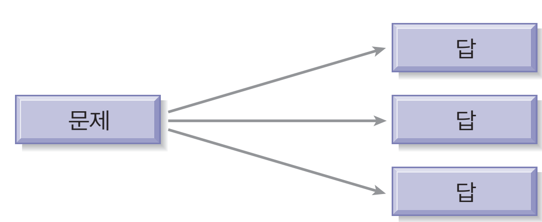


[그림 Ⅴ-2] 채점 절차

06 프로젝트

가. 프로젝트의 의미

프로젝트의 사전적 의미는 '실행 계획서'이지만, 수학 교육에서 프로젝트는 보다 넓은 의미로 무엇을 할 것인가뿐 아니라 그것을 실제로 수행하여 자료를 제시하고 그 결과를 평가하는 것을 포함한다. 프로젝트는 열린 반응을 요구하는 일종의 수행 과제를 말하며, 이때 개방형 문제, 즉 열린 반응(open-ended, open-responded) 문제는 해답이 정해져 있지 않고 학생의 관점에 따라 여러 가지 답이 나올 수 있는 문제를 말한다. 하지만 경우에 따라서 개방형 문제의 답은 모범 답안이 제한되지 않을 수 있다. 즉 결정되지 않을 수도 있다.



[그림 Ⅴ-3] 수학적 모델링 과정(NCTM, 1991)

【개방형 문제의 예】

숫자 4를 네 번 사용하고 $+$, $-$, $\times$, $\div$, $\sqrt{\ }$, 분수 등의 기호를 써서 0부터 9까지의 수를 만들어 보아라.

【풀이】

$0=4+4-4-4=44-44$

$1=\frac{4}{4}+4-4=\frac{44}{44}=\frac{4}{4}\times\frac{4}{4}=\frac{4}{4}\div\frac{4}{4}$

$2=\frac{4}{4}+\frac{4}{4}=4-\frac{4+4}{4}$

$3=\frac{4+4+4}{4}$

$4=(4-4)\times4+4=\sqrt{4+4+4+4}$

$5=\frac{4\times4+4}{4}$

$6=\frac{4+4}{4}+4=\frac{4+4+4}{\sqrt{4}}$

$7=\frac{44}{4}-4=\{4-(4\div4)\}+4$

$8=4+4+4-4=\sqrt{4}+\sqrt{4}+\sqrt{4}+\sqrt{4}$
$=4\times4\div4+4=4\times4-(4+4)$

$9=4+4+\frac{4}{4}$

학생들은 열린 반응의 과제들을 수행하기 위하여 어떤 수학적 지식을 사용해야 하는지를 결정해야 할 뿐만 아니라 때로는 어떻게 접근해 나아가야 할 것인가에 관한 수학적 방법까지도 결정해야 한다. 이에 따라 프로젝트는 학생들의 실제 생활과 직접 관련되어 그들의 고등 사고 능력을 발휘할 수 있는 문제 상황을 주제로 제시함으로써 과정 중심의 수행 경험을 하게 한다.

나. 프로젝트의 특징과 개발 시 유의점

프로젝트의 특징을 살펴보면 다음과 같다.

첫째, 프로젝트는 어떤 특수한 상황에서 개인이 원하는 바의 깊이 있는 탐구를 가능하게 하므로, 프로젝트의 주제 및 진행 과정을 개별화 또는 차별화하여 개성에 맞게 다룰 수 있다.

둘째, 프로젝트는 구체물에서 서적, 영화, 비디오 등의 매체에 이르기까지 다양한 자료에 대하여 수학적으로 해석하고 설명하는 과정을 포함하므로, 다른 교과 내용과의 연계성에 따른 수학적 가치의 인식이 가능하고 창의적 사고, 비판적 사고 등과 같은 보다 고차원적인 사고 능력을 신장시킬 수 있다.

셋째, 프로젝트는 소그룹의 협동 학습을 통하여 학생들이 자신이 속한 집단의 다른 구성원들과 이야기하고 그들의 활동 결과를 학급 전체에 (말하기와 쓰기의 형태로) 전달함으로써 의사소통 능력을 신장시킬 수 있다.

한편 다음은 프로젝트 개발 시 유의해야 할 사항이다.

첫째, 프로젝트는 학생들이 수학적인 안목에서 현상을 파악할 수 있는지, 또는 배운 수학적 지식을 사용하여 생활의 여러 가지 문제를 해결할 수 있는지를 평가하기 위한 것으로, 판에 박힌 문제(정형 문제)를 지양하고 참신하고 새로운 성격의 주제(문제)를 개발하도록 한다.

둘째, 프로젝트의 채점을 위한 채점 기준은 총체적 점수화 방법과 분석적 점수화 방법을 적절히 고려하여 작성한다. 서술형 문항의 경우와 마찬가지로, 프로젝트의 채점 기준(표)의 작성 과정에서 각 문항의 배점과 채점 요소별 배점은 평가 목적이나 목표에 따라 부여하도록 한다.

다. 프로젝트의 채점 방법

프로젝트의 수행 과정은 다음 〈표 Ⅴ-4〉와 같은 기록지를 사용한 자기 평가(self-assessment) 방법을 이용하여 학생 스스로 작성해 보게 하고, 이를 평가하거나 점검하는 것이 용이하며 바람직하다(황혜정 외, 1997).

〈표 Ⅴ-4〉 학생 자기 평가 기록지(예)

학생 자기 평가 기록지
단원명: ______________________________ 날　짜: ______년 _____월 _____일 _____교시 이　름: ______________________________　　(_____학년 _____반 _____번)
주제(문제):
해설(풀이):
반성(소감):
자기 평가: 아주 못함(　　)　　못한 편임(　　)　　잘한 편임(　　)　　아주 잘함(　　)
교사 논평:

점선을 따라 자르세요.

한편 프로젝트의 전반적인 활동 과정 및 결과에 대하여 평가하고자 할 때, 다음과 같이 관찰에 의한 평정척도지를 활용하면 편리하다(Krulick 외, 1998).

〈표 Ⅴ-5〉 평정척도법을 이용한 과제 수행 능력 평가(예)

이름: ________________ 날짜: ________________

평정척도

1=불충분 2=만족 3=훌륭함

관찰(면담) 요목			0	1	2	3	논평
과제 수행 능력	주제 이해						
	해결 전략 선정						
	계획 수행						
	검토 및 반성						
	의사소통						
	태도						

07 관찰 및 면담

가. 관찰 및 면담의 특징

관찰 및 면담에서 평가자는 수학 문제의 해결을 위하여 사고하고 있는 개인, 소집단, 또는 학급에 대하여 관찰 내지 면담을 하면서 기록하게 된다. 이 방법은 수학적인 수행 능력과 같은 인지적 영역뿐 아니라 수학에 대한 태도와 신념 등 정의적인 영역까지 평가할 수 있는 장점이 있다. 또한 관찰 및 면담은 검사를 통해 양적으로 확인할 수 있는 학생의 수학적 능력이나 사고에 대하여 보다 심화된 자료를 얻을 수 있다. 하지만 우리나라 교육 현실을 감안할 때, 독자적인 평가 기법으로서의 역할보다는 다른 평가 기법에 의한 결과를 점검하고 보완하는 보조 역할의 의미가 크다.

특히 관찰의 목적으로 사전에 생각하지 못하였던 측면에 대하여도 부수적인 자료를 수집할 수 있다. 또 관찰은 정규 수업 시간 중에 자연스럽게 이루어질 수 있고, 특정한 사고력에 중점을 두고 평가할 수 있으며, 다른 평가 기법에 의한 결과를 점검하고 보완할 수 있다.

관찰이나 지필 검사와 더불어 면담은 학생들과 직접 대화함으로써 문제 해결 상황에서 실제로 나타내 보인 행동이나 서면의 '결과'를 도출해 내기까지의 사고 '과정'에 대한 통찰을 가능하게 하는 기법이다. 개별적으로 면담을 실시하여 학습 부진아를 진단하거나 학습 우수아를 선별할 수 있다. 또 소그룹별로 과제를 수행하는 자연스러운 분위기에서 면담을 실시하여 평가 목적에 부합하는 정보를 얻을 수도 있다.

나. 관찰 및 면담의 유형

실제로 현장에서 사용할 수 있는 관찰법은 수업 시간에 교사가 학생들을 대상으로 실시하는 비참여 관찰로, 학생 전체 또는 소집단이나 개인별로 자연스럽게 행해질 수도 있다. 다만 교사가 수업을 진행하면서 관찰 결과를 기록할 수 있는 시간이 한정되어 있으므로, 학급 전체보다는 개별 또는 소집단을 대상으로 관찰을 실시하는 것이 효과적이다. 그런데 사실 비참여 관찰의 경우 객관적으로 관찰이 가능하나 관찰의 기회가 적고, 심리적으로 격리되어 있기 때문에 미세한 변화를 파악하기 힘들다.

한편 공식적 면담은 면담자가 미리 만들어진 일련의 질문을 가지고 응답자에게 질문하는 방법이다. 이때 각 면담에서는 똑같은 질문이 똑같은 방법으로 부과되므로, 공식적 면담은 질문지를 언어로 표현하는 방법이라고 볼 수 있다. 이에 반해 비공식적 면담은 면담 계획을 세우되 면담 목적만을 명백히 하여 융통성 있는 접근을 시도하는 방법이다. 따라서 연구자(교사)가 한 현상에 관한 적절한 질문들을 충분히 가지고 있지 않을 때 유용하다. 이러한 면담은 예정된 '질문군'이 없고 본질적으로 탐색전부터 시작한다고 볼 수 있다.

결국 면담이 공식적으로 진행되든 비공식적으로 진행되든, 교사는 주로 정규 수업 외의 상황에서 학생들과의 면담을 통해 그들과 직접 대화함으로써 그들이 수학 수업 상황에 어떻게 수용하고 대처하는지에 대해 보다 깊은 이해를 구할 수 있다. 또 소그룹별로 과제를 수행하는 자연스러운 분위기에서 (비공식적) 면담을 실시하여 평가 목적에 부합하는 정보를 얻을 수도 있다.

특히 공식적 면담은 개별적으로 면담을 실시하여 학습 부진아를 진단하거나 학습 우수아를 선별하는 데 유용하며, 비공식적 면담은 그들을 진단, 선별하는 것뿐만 아니라 그들의 능력에 따른 처치도 가능하다. 면담은 주로 개별적으로 진행하는 것이 상례이지만, 비공식적 면담의 경우에는 소그룹별로 면담을 진행하여 면담 대상자들끼리 보다 자연스러운 분위기에서 진행됨으로써 보다 정확한 정보를 얻을 수 있는 이점도 있다.

다. 관찰 및 면담 시 유의 사항

일반적으로 관찰을 통해 정기적으로 기록하여 평가하기 위해서는 관찰자인 교사의 많은 시간과 노력이 절대적으로 필요하며, 관찰 목적에 알맞은 현상을 포착하기 어려울 때도 있다. 또한 학생들의 반응을 관찰할 때 편견

을 가지게 되어 관찰 결과에 주관성이 개입될 여지가 있으며, 관찰의 대상이 되는 학생들 역시 관찰자인 교사를 의식하면서 행동이 달라질 수 있다. 사실 교사가 관찰만을 통하여 학생들의 다양한 행동이나 사고 과정 등을 정확히 파악하기는 어렵다.

관찰 시 유의해야 할 점은 다음과 같다.

- 뚜렷한 관찰 목적 또는 문제 의식을 가지고 관찰에 임하도록 한다.
- 관찰 계획을 치밀하게 세워야 한다.
- 부분과 전체의 관련을 지으며 관찰함으로써 피상적인 관찰이 되지 않도록 해야 한다.
- 객관적인 태도로 관찰해야 한다.
- 관찰 기간은 짧게 하고 누적시키는 방법을 쓰도록 한다.

공식적 면담의 경우에는 면담 도중 학생의 반응에 개입하는 일이 없으므로, 사전에 질문 내용들을 신중히 계획하여 작성하면 별 문제가 없으나, 비공식적 면담에서는 교사가 학생의 반응에 따라 수시로 질문하게 되므로 더욱 주의를 해야 한다.

면담 시 유의해야 할 점은 다음과 같다.

- 면담 시 교사의 반응이나 질문으로 인해 대화의 방향이 바뀌어서는 안 되므로 교사의 태도(반응)는 중립적 입장을 취해야 한다.
- 질문의 내용과 시기가 적절해야 한다.
- 학생이 편안하고 안정감을 가지도록 면접 환경과 조건을 구성해야 한다.
- 교사가 면담 시 기본적으로 갖추어야 할 태도는 중립적인 태도, 공정한 태도, 자연스러운 태도, 담화적인 태도, 친절한 태도이다.

라. 관찰 및 면담의 기록 방법

관찰 및 면담의 목적이 결정되면 대상, 장소, 시간, 기록 유형 등의 세부 계획이 진행되어야 하며, 이때 활용될 수 있는 기록 방법에는 체크리스트와 평정척도법 등이 있다.

체크리스트나 평정척도법은 사전에 관찰할 행동 요목을 제작하는 과정에서 많은 시간과 노력이 요구되지만, 그 기록 자료를 재분석하지 않고 평가 자료로 수월하게 활용할 수 있다. 그러나 체크리스트나 평정척도법은 사전에 치밀하게 관찰 요목을 작성하여도 임의적이고 예측하지 못하는 행동이 발생하는 경우에는 적절한 기록을 수행하기가 곤란한 단점이 있다.

관찰 및 면담의 자료(정보)를 수집하면, 그다음 단계로 그 정보들을 요약하고 행동의 패턴을 결정하는 작업이 필요하다. 물론 기록 형태에 따라 정보를 요약하는 방법이 다양하게 개발될 수 있다. 일반적으로는 관찰에 의해 기록된 자료들을 그래프 및 빈도, 시간, 가중치의 평균 등의 기술 통계 수치로 분석한다. 그러나 학교 현장에서는 기록된 자료를 진술문 형태로 요약하여 교사의 전문적 판단에 따라 필요한 조언을 하는 것이 보다 수월하고 바람직하며, 이는 학교생활기록부에서 각 교과에 대한 학생의 발달 상황을 작성하는 기초 자료가 될 수 있다.

관찰 및 면담은 수학에 대한 흥미와 호기심, 수학에 대한 자신감, 수학에 대한 불안, 수학의 유용성 인식, 과제 집착력과 의지, 창의적 사고, 수학 수업에의 참여 등 정의적 영역을 평가하는 데 용이하다. 다음 〈표 Ⅴ-6〉은 여러 정의적 영역에 대한 평가를 위하여 체크리스트를 사용하여 관찰 또는 면담이 가능한 구체적인 요목들을 제시한 예이다(박선화 외, 2010).

〈표 Ⅴ-6〉 정의적 영역 평가를 위한 체크리스트지(예)

체크리스트					
정의역 영역	관찰(면담) 요목	학생 1	학생 2	학생 3	학생 4
수학에 대한 흥미와 호기심	• 수학을 하는 것을 즐거워한다.				
	• 수학에서 배우는 것들에 대해 흥미가 있다.				
	• 수학 수업 시간을 기다린다.				
	• 수학에 대한 것을 읽기를 좋아한다.				
	• 수학의 개념이나 원리를 알려고 한다.				
수학에 대한 자신감	• 수학 공부에 자신감을 가지고 있다.				
	• 수학에서 좋은 성적을 받을 것이라고 생각한다.				
	• 수학에서 어려운 내용까지도 잘 이해할 수 있다.				
	• 수학을 가장 잘하는 과목 중의 하나로 생각한다.				
수학에 대한 불안	• 수학 수업이 어려울까 봐 걱정한다.				
	• 수학 성적이 나빠질까 봐 걱정한다.				
	• 수학 문제를 풀 때 긴장한다.				
수학의 유용성 인식	• 수학이 우리의 생활에 많은 도움을 준다고 생각한다.				
	• 수학이 사고력을 기르는 데 도움이 된다고 생각한다.				
	• 수학이 나중에 공부하는 데 필요하므로 중요한 과목이라고 생각한다.				
	• 수학이 나중에 직장 생활을 하는 데 도움이 된다고 생각한다.				
과제 집착력과 의지	• 수학 공부를 열심히 한다.				
	• 수학 시간에 배운 내용을 확실히 알려고 노력한다.				
	• 수학 문제를 풀 때, 답을 구할 때까지 중단하지 않고 열심히 하려고 노력한다.				
	• 수학 공부를 잘하기 위해 계획을 세우고 스스로 노력한다.				
창의적 사고	• 다른 사람의 방법을 그대로 따라 하는 것보다는 스스로 생각하고 탐구한다.				
	• 수학 문제를 풀 때 다른 사람과는 다른 독특한 방법을 찾아보려고 한다.				
	• 수학 문제를 풀 때 한 가지 방법으로 해결하는 것보다는 다양한 방법을 찾아보려고 한다.				
	• 수학 문제를 풀 때 내가 알고 있는 방법 중에 어떤 것이 더 적절한지를 생각한다.				
수학 수업에의 참여	• 수학 수업 시간에 모둠 활동에 적극적으로 참여한다.				
	• 수학 수업 시간에 다른 생각을 한다.				
	• 수학 수업 시간에 발표를 많이 한다.				
	• 수학 문제를 풀 때 아이디어를 다른 학생들과 공유한다.				

VI. 좋은 수업의 의미

01 좋은 수업에 대한 관점의 변화

어떤 수업이 좋은 수업인가에 대한 견해는 구성주의 이론의 도래와 함께 바뀌기 시작하였다고 볼 수 있다. 구성주의 인식론에서는 지식을 개인이나 집단이 적극적으로 만들어 낸 경험적 구성물로 본다. 즉, 학생들은 모든 지식을 수동적으로 받아들이는 것이 아니라 학생 스스로 능동적 구성 활동에 의해 이를 형성한다는 것을 그 주된 요지로 삼고 있다. 이와 같은 관점에서 생각해 볼 때 교사의 가장 중요한 역할은 학생들이 개념을 탐구하고 개념 사이의 관련성을 잘 이해할 수 있도록, 다시 말해 구성 활동이 잘 일어날 수 있도록 총체적인 환경을 조성해 주는 것이다.

학습 기회의 제고라는 측면에서 좋은 수업을 진단할 때, 학습 기회란 수업을 통해 가르쳐진 것과 평가되어지는 것 사이의 중복 정도를 의미한다. 이는 수업 중에 다루어지는 교육과정의 내용과 평가의 내용이 수업의 주요 목표를 반영해야 함을 뜻한다. 그러므로 1980년대 이래로 교육과정의 개정은 교사가 아닌 학생 중심의 교육을 강조하고, 실생활과 학교 교육 내용을 연결시키며, 단순 암기나 훈련보다는 이해와 사고에 초점을 두어 왔다.

따라서 진정한 학습은 일상의 학습 상황에서 다양한 정보와 같은 인지적 도구 혹은 다른 사람들의 도움을 받아 학생들이 확실하게 어떤 문제 상황을 파악할 수 있을 때 일어난다고 볼 수 있다. 그러므로 학습자는 문제를 해결하면서 개개인이 직접 이미 알고 있던 지식을 사용하여 새로운 지식을 만들어 내는 과정을 통하여 자신의 생각을 다양한 방법으로 적용하고 또 새로운 의미를 창출함으로써 그와 관련된 내용을 이해하게 된다는 것이다(von Glasersfeld, 1993).

다시 말하면 구성주의에 입각한 수학 수업의 방법은 어떤 개념을 습득함에 있어서 고정되고 활동력이 없는 인식이 아닌 가변적이고 유용한 인식의 발달을 강조한다. 학습은 사회 활동을 하는 가운데 일어나며 학습자들 간, 혹은 교사와 학생 사이에 생각이나 아이디어를 서로 교환함으로써 이해를 증진시킨다(남승인, 1998). 이때 교사는 학생 스스로가 의미 있는 학습 활동에 참여할 수 있도록 도와주어야 한다. 아울러 학습자는 능동적이고 무한한 잠재력과 가능성을 가지고 있다고 보며, 따라서 학습자 개개인의 생각과 아이디어를 학습 활동에 최대한 반영하여야 한다는 것이다. 이렇게 볼 때 중앙집권식 교육과정의 편성 · 운영을 탈피하고 현장 중심으로 전환함으로써 학습자들을 보다 창의적인 교육과정에 의해 가르칠 수 있게 된다고 본다(최승현 외, 2002).

〈표 Ⅵ-1〉 좋은 수업을 위한 교수-학습 관점의 변화

교수-학습 관점의 변화		
강의식 전체 수업, 교사의 지시 중심 수업	➔	경험적, 귀납적, 실제적인 학습
수업 시간 중 학습자의 수동성: 좌석에 앉아 있기, 정보를 듣고 암기하기	➔	수업 시간 중 학습자의 능동성: 모든 학생들이 학습에 직접 참여하기
학습지, 시험지, 연습지 등의 활동	➔	고등 사고력을 강조한 중심 개념과 원리 배우기
모든 교과 영역의 많은 학습량을 교사가 직접적으로, 간단히 다루기	➔	학습의 과정(계획, 정리, 관찰, 평가)에 대한 학습자의 책임하에 학습자 자신이 직접 연구 과제를 결정하기
어떤 사실이나 사항을 단순 암기하기	➔	학습자 개개인의 정의적인 요구나 다양한 인식 양식에 관심을 가지기

성적이나 학업 경쟁을 강조하기	➡	교실을 독립된 작은 사회로 만들기 위한 협동 또는 합작 활동
능력별 그룹을 만들거나 능력별 이름 붙이기	➡	다양한 능력의 학생들을 같은 그룹에 배치하여 활동하기
특별 프로그램을 대용하기	➡	교사, 학부모, 학교 직원들의 다양하고 협동적인 역할을 활용한 일반 학급에서의 특별 지도
표준화 검사를 사용하기	➡	교사들의 관찰로 얻어진 질적 형태의 기술적 평가 사용하기

02 수학과 좋은 수업의 조건

수학과 교과 특성을 반영한 '좋은 수업'이란 '좋은 수업'에 대한 범교과적 정의와 그 궤도를 함께하면서, 수학 수업과 관련하여 현장의 교사들이 제기하는 문제점들을 효과적, 현실적으로 해결해 나가고 있는 수업들이라는 가정하에, 현장의 수학과 수업 지도와 관련하여 제기되어 온 문제점을 감안한 수학과 좋은 수업 선정 기준은 다음과 같다(최승현 외, 2002).

가. 교육과정과의 일관성을 유지하면서 수학과 목표와 본질에 부합되는 수업이어야 한다.

현장의 수학 교사는 수학과 목표와 본질에 부합되면서 학생들의 요구, 능력 및 흥미에 알맞게 교육과정을 재구성할 필요가 있다. 실제로 좋은 수업을 진행하는 교사는 장기적인 기대, 학습 목표, 계획, 학습 활동, 자료 및 평가의 모든 측면을 포함하여 교실 수준에서 실행된 교육과정을 계획, 실천 및 평가하여야 한다(NCTM, 1993). 그뿐만 아니라 수업 목표와 목표 달성을 위하여 모든 교육과정의 요소들을 결합한 일관성 있는 체제를 유지해야 한다.

교육과정과 학습 내용 사이의 일관성을 유지하는 것은 학생들로 하여금 유의미한 지식을 구성할 수 있도록 한다. 즉, 학생들이 학교 밖 생활에서도 쉽게 접근하여 활용할 수 있는 지식을 구성할 수 있도록 하여야 한다. 이때 교사는 (1) 수학과 교육과정과 일관성을 유지하면서 핵심적인 내용들을 심도 있게 학습할 수 있도록 학습 내용의 폭을 줄이고, (2) 학습 내용을 중요한 개념 중심으로 구조화하여 제시하며, (3) 주요 개념들과 그들 사이의 관련성을 쉽게 설명할 수 있도록 교육과정 내용을 재구성하고, (4) 수학과 목표와 본질에 부합되는 수업의 결과를 반영하는 학습 활동과 평가 방법을 학생들에게 제공해야 할 것이다.

나. 수학 수업에서는 수학적 경험이 실생활에 활용되는 가치 있는 것임을 학생들이 인식하여 실생활의 수학적 상황에 전이될 수 있도록 해야 한다.

현장의 수학 수업에서의 문제점은 현실과 유리된 많은 양의 수학적 지식을 교과서나 틀에 박힌 수업 양식에 의존하여 가르친다는 것이다. 좋은 수학 수업을 위해서는 학생들 스스로 문제를 이해하고, 문제 해결의 과정에 관련된 다양한 전략들을 활용하여 실제적으로 문제를 해결하며, 그 과정을 반성해야 한다. 즉, 학생들이 설계한 문제 해결 활동이 이루어지는 기회를 제공하여야 한다. 학교에서 배운 수학이 학교 밖의 다른 실제 상황들에서 활용될 수 없다면, 수학을 학습할 필요성이 줄게 된다. 즉, 학교에서 배운 수학 지식은 실생활에 적용될 때 보다 유의미해진다. 따라서 좋은 수학 수업이란 학생들이 수업 시간에 배운 지식, 이해, 추론 및 문제 해결을 다른 학문 분야에는 물론 실생활 상황에도 적용할 수 있도록 가르치는 수업이다. 장래에 수학이나 과학과 관련된 직업에 종사하게 될 학생들뿐만 아니라 교양을 갖춘 시민이

되기 위하여 학교 수학 교육은 우리가 살아가고 있는 현실 세계에 대한 이해와 흥미를 길러 줄 수 있어야 한다(OECD, 2001).

학교에서는 도형의 넓이나 부피에 대하여 배우지만 실생활에서 어떻게 활용되는지, 어떤 경우에 필요한지를 파악하지 못한다면 이러한 내용들을 학습하는 의미가 반감된다. 그러므로 수학 교사들은 학교 수학을 대학 입시를 위한 과목으로만 중요하게 취급할 것이 아니라, 현실 세계를 살아갈 수 있는 수학적 소양을 갖춘 시민을 양성한다는 취지를 잊지 말고 가르쳐야 할 것이다. 이러한 맥락에서 수학 교사의 중요한 역할은 수학적 능력이 지역 공동체 속에서, 학생들의 일상생활 속에서, 나아가 보다 광범위한 사회적 당면 과제들 속에서 어떻게 적용되는가를 학생들이 파악할 기회를 제공하여야 한다(NCTM, 1989, 1991). 그러므로 학교에서 배운 것을 다른 상황으로 전이할 수 있는 학생의 능력 양성을 위해 교사는 다음과 같은 측면을 강조하여 수업하여야 한다.

- 적절한 수준의 내용을 이해하지 않고서는 실생활로의 학습 전이는 기대하기 어려우므로, 학습한 내용을 숙달하도록 한다.
- 학생들이 학습한 내용에 대하여 다른 상황으로 전이할 수 있음을 인식하도록 한다.
- 학습한 내용과 관련된 교과 내 다른 영역과 타 교과 영역에 적용하도록 한다.
- 학생들이 스스로 학습하고, 스스로 평가한 결과를 피드백할 수 있도록 돕는다.
- 단순 암기보다는 이해를 추구하는 수업을 진행한다.

다. 수학 수업은 현대의 수학 지식을 반영하는 내용과 첨단 기술의 발달을 반영한 기술과 도구의 학습이 요구되므로 컴퓨터, 멀티미디어 및 다른 기술 등과 통합되어야 한다.

수학이 생성되고 응용되는 방법이 현대화되면서 학생들이 배워야 하는 수학적 아이디어나 수학적 입장도 변화되고 있다. 예를 들어 학교 수학에서는 규칙이나 공식으로 설명될 수 있는 필연적인 사건을 주로 다루는 반면, 실생활의 현상에서는 임의의 모델인 경우가 대부분이다. 이러한 변화의 원동력은 컴퓨터의 보급이다. 컴퓨터의 도입으로 지금까지는 생각지 못했던 새로운 유형의 문제를 만들 수 있게 되었고, 수학의 내용과 방법도 많이 달라졌다. 예를 들어 연속적인 것에서 이산적인 것으로, 정확한 것에서 반올림한 값으로, 추상적인 것에서 구체적인 것으로, 이론적인 것에서 경험적인 것으로 변화되었다.

컴퓨터와 계산기는 수학적 아이디어와 응용을 탐구할 기회를 제공한다. 예컨대 저학년의 학생들도 계산기 자체를 수학적인 대상으로 생각하며 계산기의 기능과 규칙을 배울 수 있다. 고학년의 학생들은 그래픽 소프트웨어를 이용하여 함수의 그래프, 함수의 변환을 탐구할 수 있으며, 그 결과 함수 관계를 전보다 더 쉽게 이해할 수 있을 것이다(신동선 외, 1998). 이와 같이 공학적 기술 도구의 사용은 학습 환경을 풍부하게 만들 뿐만 아니라 학습의 질을 향상시킨다. 즉, 학생들은 이러한 기술이 없었다면 불가능했을 활동들을 경험하고 참여할 수 있게 된다. 인터넷이나 모의실험(simulation) 등의 기술들은 수학과 실생활을 연결시키고, 나아가 학습 환경을 보다 넓은 범위로 확산시킬 수 있는 능력을 가지게 한다.

라. 학생들의 선행 지식(기존 지식)을 고려한 수학 수업이어야 한다.

좋은 수학 수업은 새로운 지식을 선행 지식에 관련시킬 수 있는 수업이어야 한다. 그러나 학생들이 선행 지식을 지니고 있는 것만으로 바람직한 학습 결과를 가져오지는 않으며, 학생들이 선행 지식을 새로운 이해와 학습에 활용할 수 있도록 교사가 학습자의 선행 지식에 관심을 기울이고, 이러한 선행 지식을 수업의 출발점으로 활용할 때 비로소 학습이 촉진될 수 있다. 그러므로 수학과 좋은 수업을 위해서는 교사가 학생들이 이미 지니고 있는 선행 지식을 이끌어 내고, 직접적인 체험 활동이나 사고 활동을 통하여 새로운 개념을 도입하며, 나아가 학생들의 기존의 개념을 새로운 개념과 연결하여 통합적인 개념으로 수정해 나가야 한다(Driver 외, 1995).

이와 같이 학생들이 선행 지식을 활성화하여 수학과 학습에 활용할 수 있도록 수업을 할 때, 교사는 다음과 같은 측면을 고려해야 한다.

- 교사는 학생들이 가지고 있는 선행 지식이 무엇인가 정확히 파악하여야 한다.
- 교사는 학생들이 새로운 내용의 학습에 필요한 선행 지식을 활성화하도록 수업 시작 시 수업의 내용에 대하여 논의한다.
- 때때로 학생들의 선행 지식이 불완전하거나 치명적인 오개념을 포함하고 있을 수도 있으므로, 교사는 학생들이 지니고 있는 불완전하거나 잘못된 개념을 상세히 조사할 필요가 있다.
- 학생들이 새로운 내용의 학습에 필요한 선행 지식을 갖추지 못한 경우, 교사는 중요한 선수 학습 자료들을 미리 다루어 수업 진행에 차질이 없도록 해야 한다.
- 교사는 학생들이 선행 지식과 새로운 학습 내용을 연관지을 수 있도록 적절한 질문을 제공하여야 한다.
- 교사는 학생들이 선행 지식과 새로운 개념의 관계를 파악하고, 또 다른 형태의 통합적인 개념을 형성하도록 도와야 한다.
- 교사는 교수-학습에 관한 인지심리학의 이론에 초점을 맞추어 수업해야 한다.

마. 학습자 스스로 문제 해결 활동을 수행할 수 있도록 이끄는 수업이어야 한다.

좋은 수업이란 학생들로 하여금 주어진 수학 문제를 이해하고 그 풀이 과정을 추론하며 이를 이용하여 문제를 해결할 뿐만 아니라 교사나 다른 학생들에게 자신의 방법을 설명할 수 있도록 하는 일련의 학습 전략을 가르치는 수업이다. 보스니아도(Vosniadou, 2001)는 교사가 학생들에게 학습 전략들을 가르치기 위한 체계적인 노력을 할 때, 학생들이 실질적인 성과를 얻을 수 있다고 주장하였다. 이러한 학습 전략들은 학습 과정을 촉진하고 학습을 제고할 뿐더러 학생들이 주어진 상황에 적절한 방법으로 문제를 이해하며 이를 해결할 수 있도록 돕는다는 측면에서 중요하다. 그러므로 문제 해결에 있어서 보다 적용 범위가 넓을수록 성공적인 학습 전략이 된다.

여기서 중요한 것은, 교사는 학생들에게 단순히 수학적 지식의 전달과 수학을 하는 방법을 가르치는 것에만 국한할 것이 아니라 학생들에게 자신의 학습을 스스로 관리, 감독할 수 있는 메타인지 학습 전략을 가르쳐야 한다는 것이다. 구체적인 학습 기능과 내용도 중요하지만, 학습자가 스스로의 학습 과정을 감독하고, 학습이 일어나는 중에 자신의 마음에 어떤 변화가 일어나는지를 의식한다는 것은 보다 고차원의 학습을 위해 중요하다. 즉, 학생들은 주어진 학습 목표 달성을 위해 자신의 학습 진행 과정을 측정하고, 끊임없이 감독하고, 스스로 조절하며, 반성적으로 사고할 필요가 있다.

학습에서의 자기 조절(self-regulation)이란 학습자 자신이 스스로의 학습 과정을 평가하고 이해 수준을 점검하며, 필요시 실수를 수정할 수 있는 전략들을 개발하는 것을 포함한다. 교사는 다음과 같은 기회를 제공함으로써 학생들이 자기 조절적인 학습자가 되도록 도울 수 있다.

- 문제를 해결함에 있어서 학생 자신이 문제 해결 전략이나 방법을 계획하도록 한다.
- 사용 가능한 가장 효과적인 학습 전략들은 무엇이며, 이들을 어떻게 사용할 것인지를 알도록 가르친다.
- 학생 스스로 자신의 수학적 사고 과정을 점검하고, 이해 수준에 따라 문제가 요구하는 질문에 답할 수 있도록 한다.
- 주어진 진술문이나 주장, 문제에 대한 해결책 등에 대하여 평가하도록 한다.

바. 학생들의 동기 유발이 가능한 수학 수업이어야 한다.

일반적으로 학습에 대한 동기가 유발된 학습자는 설정한 목표를 달성하려는 열의가 있으며, 끈기와 의지를 가지고 학습 성취에 많은 노력을 기울이게 된다. 이는 수학 학습에 있어서도 마찬가지이다. 그러므로 학습자의 동기는 학습되는 양과 질에 영향을 미치게 되며, 수학 교사들은 동기 유발된 학습자를 원한다. 교사의 말과 행동은 학생들의 목표 달성 의지에 영향을 미치게 되며, 내적 동기가 유발된 학습자는 학습 성취를 위해 더 노력하게 된다. 교사가 학생들의 내적 동기 유발을 위해 취할 수 있는 행동들은 다음과 같다.

- 새롭고 흥미 있는 학습 과제를 제공함으로써 학생들이 호기심을 갖고 고차원의 사고 기술을 사용하도록 장려한다.
- 학생들의 성취를 외적인 요인이 아닌 내적인 요인들로 귀착시키고 스스로의 수학적 능력에 대하여 자신감을 가질 수 있도록 격려한다.
- 학생 각각의 수준에 실현 가능한 목표를 설정하도록 조언한다.
- 학생들의 수학적 성취를 인정하고, 그 결과에 대하여 정직하게 평가한다.
- 학생들의 성취 결과를 내적 동기를 유발할 수 있는 언어를 사용하여 피드백할 뿐만 아니라 학생들이 활용하는 학습 전략을 개선할 수 있도록 그 방법을 제공한다.

사. 지식 위주의 평가보다는 실제 상황에 기초한 평가 방법을 수반하는 수학 수업이어야 한다.

실제 상황에 기초한 평가 방법 중 하나인 수행 평가는 그 목적과 수행 과정, 그리고 평가 결과가 모두 일치하고 있다. 바람직한 평가는 수업에서 다룬 내용에 대하여 평가하고, 평가가 수업과 일관될 뿐만 아니라 의도한 학습 목표와 일치하며, 나아가 수업의 방식과도 일관성을 유지하는 평가이다. 예를 들어 고차원의 분석과 추론 기술을 활용한 수업에서 학습한 것을 선다형 객관식 문항으로 평가하는 것은 수업의 방법과 평가 사이에 일관성이 결여된 경우이다. 교육 개혁의 중요한 한 부분을 차지하고 있는 수행 평가는 실생활 과제와 상황에서 학생들의 수행 능력을 측정하고 반영하는 것이다.

좋은 수학 수업에는 수업에서 기대되는 학습의 본질, 사용된 학습 자료, 일관성을 유지한 다양한 평가 전략들이 포함된다. 수학과 좋은 수업에서의 평가는 학생들에게 기대되는 것과 결과에 대한 명확한 의사 전달이 요구된다. 이때 평가는 수업과 일관성 있게 통합되어 서로에게서 유용한 정보를 얻을 수 있도록 한다. 수업과 평가를 통합하기 위하여 교사들은 다음 사항들을 주목하여야 한다.

- 학생들에게 도전적이고, 학생들의 발달 단계상 적절한 학습 표준을 개발한다.
- 학생들 사이의 개인차를 적절하게 고려한다.
- 학생들의 수학에 대한 이해 발달을 도울 수 있는 수업 및 평가 전략을 선택한다.
- 상호 양립 가능한 수업 및 평가 전략을 선택한다.
- 다양한 방법과 도구를 활용하여, 학생들의 과학적 추론 기술과 과학 개념의 이해에 대하여 체계적으로 자료를 수집한다.
- 학생들이 그들의 지식, 이해 수준 및 기술을 다양한 방법으로 증명할 수 있는 기회를 제공한다.
- 다양한 수준에서 다양한 방법으로 이루어진 평가 결과들을 교수-학습의 개선을 위해 활용한다.

학교 현장에는 학생들의 수준을 고려한 학생 개인 수준에 맞는 학생 중심 교육과정이 구현되어 있는데, 교사뿐만 아니라 교장, 교감 차원에서도 이에 적합한 평가 방법을 생각해 보아야 한다. 모든 실제 상황에 기초한 평가의 시행 및 운영을 교사에게만 맡긴다는 것은 교사에게 지나친 부담이 될 수도 있다.

VII. 수학과 수업 평가

01 수학과 수업 전문성의 의미

학교 교육에서 교사의 역할이 중요해지고 교사의 책무성에 대한 기대가 높아지면서, 세계 여러 나라에서는 우수한 교사를 확보함과 동시에 현직 교사의 전문성 발달을 촉진하고자 각별한 노력을 기울이고 있다. 이러한 상황에서 학생들의 학습을 평가하기 위한 활동과 평가 방법을 고안하고 그 효과를 경험한 교사들은 이러한 수업 전문성 기준의 유용성을 알고 있으며, 교사의 수업 전문성 평가에도 학생 평가와 같은 원리가 적용된다. 수업 전문성 기준에 비추어 교사의 수업 전문성을 평가(즉, 수업 평가)를 하기 위한 방법들이 제시되고 있으며, 이러한 평가의 시도 자체가 교사들의 좋은 수업 실행을 위한 하나의 기준이 될 수 있다.

구체적인 수학과 수업 전문성 기준 개발의 방향은 다음과 같다(임찬빈 외, 2006).

첫째, 수학 교사의 수업 활동을 총망라하는 포괄적인 기준을 제시한다. 다시 말하면 수학과 수업 전문성 기준은 교사의 수학 수업 전-중-후 활동인 수업을 준비하기 위한 과정-실제 수업 실행-수업 후 반성과 평가 · 향후 개선 노력 등을 종합적으로 다룬다.

둘째, 수학과의 모든 내용 영역에 공통적으로 적용할 수 있는 종합적인 기준을 제시한다. 즉, 특정 영역이나 단원에 국한하는 기준보다는 각 영역에 고루 적용할 수 있는 대표적인 기준을 중심으로 제시한다.

셋째, 각 기준 간의 상호 연계를 고려하여 제시한다. 즉, 수업의 흐름을 고려하여 각각의 기준을 독립적인 영역과 요소로 제시하되, 이들 간의 관계가 상호 의존적으로 연계됨을 보여 준다. 수업이란 복합적이고 다면적일 뿐만 아니라 수업의 제 양상은 상호 의존적이다. 이러한 다층적 위계 속에서 수업 평가 기준의 대영역을 설정하고 다시 중영역과 하위 요소로 세분하여 제시한다.

넷째, 목적과 상황에 따라 유연하게 선택할 수 있는 종합적인 기준 목록을 제시한다. 즉, 수학과 수업 평가 기준은 모든 수업에 획일적이고 고정적으로 적용하는 것이 아니라, 목적과 상황에 따라 기준들을 선정, 조합하고 수학과 각 영역의 특성에 따라 그것들을 변용하여 달리 적용할 수 있음을 고려한다.

다섯째, 수업 전문성 기준은 하나의 개별 기준도 다양한 방식으로 접근하여 판단할 수 있음을 전제하여 제시한다. 교사의 전문성과 수업의 양상은 한 가지 측면에서 살피기보다는 다양한 각도에서 접근하고 판단할 필요가 있다. 예전에는 주로 수업 활동에 초점을 맞추어 수업 평가가 이루어졌기에 교실 수업 관찰이 가장 강력한 평가 도구였지만, 수업 전문성은 수업 전-후의 활동을 모두 포함하므로 교실 수업 관찰만으로 기준의 달성 정도를 가늠하기 어렵다. 따라서 특정 기준이 달성된 정도를 판단할 때에는 전문성 기준 영역과 요소별로 다양하게 제시하고, 나아가 각각의 기준도 다양한 방법으로 적용할 수 있음을 전제한다.

여섯째, 수업 전문성 기준은 수업을 위한 장 · 단기적인 계획이나 단원 단위로도 활용할 수 있도록 충분히 고려하여 제시한다. 수업 전문성 기준의 적용은 하나하나의 수업에 국한하지 않으며, 수업 전-중-후를 포괄하여 설정하여야 한다.

요약하면, 수업 전문성 기준은 좋은 수업 활동의 실제를 특징짓는 요소들이라고 규정지을 수 있다. 그러므로 수업 전문성 기준은 (1) 초보 교사를 위한 지침, (2) 숙련된 전문가 교사를 위한 지침, (3) 개선 노력을 집중할 부분을 파악하는 구조, (4) 교사 집단 이외의 다른 공동체들과의 의사소통의 수단으로 사용될 수 있다.

교사의 수업 활동에 대한 전문성 기준이 마련되었을 때, 관계 당사자들은 공유된 개념과 가치 속에서 개선을 위한 노력을 어디에 집중할 것인지에 대한 논의를 할 수 있게 된다. 아울러 수업 전문성 기준에 교직의 임무와 역량, 우수한 교수 활동의 수준을 명확하게 규정해 놓음으로써 타 분야의 사람들로부터 신뢰받을 수 있고, 교직의 위상을 높일 수 있게 된다. 교사들은 교수 활동을 기술하는 공통된 용어의 가치를 익히 알고 있다. 또한 수업 전문성 기준은 교사들에게 '우수성'에 대한 합의된 기준을 제공함으로써 모범적인 교수 활동에 대한 교사들의 대화를 조직하는 역할을 한다. 이러한 대화를 통하여 경력자뿐만 아니라 초보자의 수행 수준을 향상시킬 수 있을 것이다.

한편 수업 전문성 향상을 위한 평가, 즉 수업 평가 기준에서 규정하는 교사의 가장 중요한 역할은 학생들이 주요 내용 학습에 참여할 수 있도록 지원하는 것이다. 수학과 수업 평가 기준의 구성 요소들은 이러한 목적하에 조직되며, 중요한 내용을 학습할 때 교사는 학생들과 함께 학습자 공동체를 조성해 나아가야 할 것이다.

대니얼슨(Danielson, 1996)은 초임 교사와 경력 교사들이 함께 활용할 수 있도록 보완한 수업 평가 기준을 제시하면서 복합적인 교수 활동을 4개 영역(계획과 준비, 교실 환경, 수업, 전문적 책임)으로 구분하였다(임찬빈 외, 2004, 재인용). 이 수업 평가 기준은 교사의 전문성 발달 단계를 파악하여 각 영역에 알맞은 해당 요소들을 제시함으로써 교사로 하여금 전문성을 계발하고 자기 반성에 활용할 수 있도록 하였다.

수업 평가 기준을 개발 · 실행하는 과정에서 교사는 공동의 연구를 해야 할 뿐만 아니라 평가 기준 개발을 뒷받침하는 원리와 목적에 대한 이론적 근거도 확보하여야 한다. 무엇보다도 수업 평가 기준을 개발하고 설계함에 있어서 주요 이해 당사자들인 교사, 전문가 집단, 정부 기관 등의 참여와 논의가 요구되며, 그에 대한 활용을 전제로 개발하여야 한다. 이때 주의해야 할 것은 교사 자신이 수업 평가 기준을 지원하는 결정적인 역할을 하여야 활용이 가능하게 된다는 점이다.

또한 수업 평가 기준은 자기 평가나 동료 평가, 상호 평가 등으로 활용될 수 있도록 보다 상세하게 개발되어야 하며, 교사의 가르치는 활동에는 일정한 기준이 있다는 점도 제시하여야 한다. 대부분의 교사들은 전문적인 교수 활동의 필수 요소들을 이해하고 있음에도 불구하고, 지극히 관념적인 수준에서 표현하는 경우가 흔히 있는데, 이 점을 특히 주의해야 한다. 동료 교사들뿐만 아니라, 학생, 학부모 및 사회의 다른 구성원들이 교사에게 요구하는 지식과 역량을 명시하는 수업 평가 기준은 좋은 교수 활동을 파악하고 알리며 보상할 수 있는 수단이 되기도 한다.

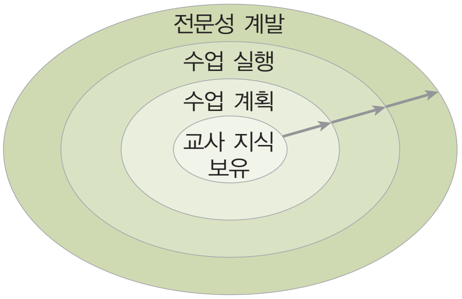
02 수학과 수업 영역 및 요소

가. 수업 평가 영역

수업 평가는 수업 전, 수업 중, 수업 후의 단계별로 진행할 수 있으며, 이러한 수업 단계는 '지식 보유', '수업 계획', '수업 실행', '수업 반성' 부문으로 구성되는데, 이는 교사가 좋은 수업을 하기 위해서는 다음과 같은 요건을 갖추어야 하기 때문이다.

- 교사가 알아야 할 것 ⇨ 지식 보유
- 교사가 준비해야 할 것 ⇨ 수업 계획
- 교사가 행해야 할 것 ⇨ 수업 실행
- 교사가 전문성 발달을 위해 해야 할 것 ⇨ 수업 반성

아는 것이 바로 수업의 실행으로 옮겨지는 것만은 아니지만, 일반적으로 교사가 계획을 세우고 준비하는 것은 수업에 영향을 주고, 이러한 모든 것은 실시한 수업에 대한 교사의 반성적 실천의 영향을 받게 된다. 이렇듯 [지식 보유] ⇨ [수업 계획] ⇨ [수업 실행] ⇨ [수업 반성]의 연계성이 있음을 나타내고 있다. [그림 Ⅶ-1] 참조



[그림 Ⅶ-1] 교사의 수업 단계

위의 [그림 Ⅶ-1]에서 알 수 있는 바와 같이, 교사의 '지식 보유'는 교사가 갖추고 있는 지식에 관한 이해 정도가 수업을 원만히 진행하는 데 충분하다고 생각하는가, '수업 계획'은 본인이 준비한 수업 계획 정도가 수업을 원만히 진행하는 데 충분하다고 생각하는가, '수업 실행'은 본인이 계획한 대로 수업을 충실히 실행하였다고 생각하는가, 그리고 '수업 반성'은 본인의 수업 실행 결과에 만족하는가 등을 반영하기 위한 것이다.

수업 평가를 위한 세부 영역 및 이에 관한 설명은 다음 〈표 Ⅶ-1〉과 같다.

〈표 Ⅶ-1〉 수업 평가 영역

수업 평가 영역		수업 평가 영역에 관한 설명	비고(수업 평가 요소)
교과 내용	• 교육과정 이해 및 재구성	교육과정 목표 및 내용에 관하여 정확히 이해하고, 이를 적절히 재구성하여 수업에 반영하는 것	수학과 교육과정 목표 및 내용에 부합하는 수업 진행하기
	• 수학 내용	소양이 되는 학교 수학 및 학문 수학에 관하여 충분히 이해하고, 이를 수업에 적절히 반영하는 것	학교(중등) 수학 및 학문 수학에 기초하여 내실 있는 수업 진행하기
	• 방법적 지식	문제 해결, 의사소통, 추론 등의 활동을 충분히 이해하고, 이를 효과적으로 수업에 반영하는 것	문제 해결, 의사소통, 추론 등의 활동을 적절히 반영하여 수업 진행하기
	• 수학적 가치	수학적 가치와 중요성을 충분히 인식하고, 이를 수업에 적절히 반영하는 것	수학적 가치와 중요성이 전달되도록 수업 진행하기
학습자 이해	• 학습자 수준	학습자의 인지 수준, 선행 지식, 학업 성취 수준 등을 파악하고 이를 적절히 수업 시간에 반영하는 것	학습자 수준에 부합하는 학습 내용 및 과제, 활동을 수행하기
	• 학습자 오개념	학습자의 오개념을 인지하고 이에 대처하는 것	학습자의 오개념을 파악하여 적절한 피드백 주기
	• 학습 동기	학습자의 관심 및 흥미도를 파악하고 이를 고취시키는 것	학습자 수준이 반영된 적절한 수업 활동을 통하여 학습 동기 및 흥미 유발하기
	• 수학적 태도	학습자의 자신감, 신념 등을 파악하고, 이를 증진시키는 것	학습자의 수학 학습에 대한 긍정적 태도 증진시키기
	• 학습 방법	학습자가 선호하는 학습 활동 및 방법을 파악하고, 이를 수업에 반영하는 것	학습자가 선호하는 학습 활동 및 방법을 반영하여 수업 진행하기
교수 학습 방법 및 평가	• 수업 목표 및 내용 반영	교육 목표 및 내용을 파악하고 이에 적합한 교수 학습 방법을 수행하는 것	수업 목표 및 내용에 적합한 수업 방법을 이용하여 수업 진행하기
	• 문제 해결 활동 반영	수학적 문제 해결과 관련된 전반적인 활동을 인지하고 이를 적절히 반영하여 교수 학습 방법을 수행하는 것	수학적 문제 해결 관련 활동을 적절히 활용하여 수업 진행하기
	• 학습자 수준 및 태도 반영	학습자의 인지 수준 및 정의적 특성을 인지하고, 이를 적절히 반영하여 교수 학습 방법을 수행하는 것	학습자 수준 및 태도에 부합하는 수업 방법을 이용하여 수업 진행하기
	• 질문 및 의사소통 활용	효과적 질문 및 의사소통에 관해 인지하고, 이를 적절히 활용하여 교수 학습 방법을 수행하는 것	효과적 질문 및 의사소통을 수반하는 수업 방법을 이용하여 수업 진행하기
	• 평가 방법 및 절차 마련	수업 목표, 학습자 수준, 평가 목적 등에 따른 평가 방법 및 절차를 계획하고 마련하는 것	평가 목적에 부합하는 평가 방법 및 절차 마련하기
	• 평가 도구 개발	학습 목표에 따른 평가 목표, 문항, 기준 선정 및 실행에 관하여 인지하고 이를 수행하는 것	평가 계획에 준하는 적절한 평가 도구 개발하기
	• 평가 결과 활용	수업 개선 및 학습 처치를 위한 피드백 계획 및 실행을 교사가 인지하고 수행하는 것	수업 개선 및 학습 처치에 유용하도록 평가 결과 활용하기
수업 상황	• 도구 및 교구, 자료 활용	학습 목표와 학습자 수준에 적합한 공학적 도구, 교구, 또는 자료 등을 파악하고, 이를 준비하여 수업에 활용하는 것	학습 목표와 학습자 수준에 적합한 공학적 도구, 교구, 또는 자료를 준비하여 활용하기
	• 교실 환경 및 수업 집단 조성	여러 도구 및 교구, 자료의 효율적인 활용성을 이해하고, 이에 맞춰 수업 환경 및 집단을 구성하는 것	공학적 도구, 교구, 자료 등의 효율적 활용을 위하여 적절한 수업 집단 및 교실 환경 조성하기
	• 학습 태도 및 수업 분위기 조성	교사가 해당 수업 내용에 관한 학습자의 적극적 학습 태도 및 긍정적 수업 분위기를 인지하고, 이를 유도하는 것	학습자의 적극적 학습 태도 및 긍정적 수업 분위기 유도하기
	• 학생 관리 및 수업 상황 대처	학습자의 어려움 또는 질문 등을 인지하고, 이를 효율적으로 대처하는 것	학습자의 어려움 및 질문 등을 합리적으로 처리하기

나. 수업 평가 요소

수업 평가 영역에 따른 수업 평가 요소는 다음 〈표 Ⅶ-2〉와 같이 평정척도법을 이용하여 평정척도를 3단계 정도로 두는 것이 적당하며, 경우에 따라서는 5단계로 좀 더 세분화하여 사용하도록 한다.

수업 평가 요소를 수업 전(지식 보유 및 수업 계획), 수업 중(수업 실행), 수업 후(수업 반성)의 상황으로 세분화하여 제시하면 다음과 같다.

〈표 Ⅶ-2〉 수학 수업 평가 요소

수업 평가 영역		수업 평가 요소		평정척도		
				그렇다	보통이다	그렇지 못하다
교과 내용	1. 교육과정 이해 및 재구성	수학과 교육과정 목표 및 내용에 부합하는 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	2. 수학 내용	학교(중등) 수학 및 학문 수학에 기초하여 내실 있는 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	3. 방법적 지식	문제 해결, 의사소통, 추론 등의 활동을 적절히 반영하여 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	4. 수학적 가치	수학적 가치와 중요성이 전달되도록 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
학습자 이해	1. 학습자 수준	학습자 수준에 부합하는 학습 내용 및 과제, 활동을 수행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	2. 학습자 오개념	학습자의 오개념을 파악하여 적절한 피드백 주기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	3. 학습 동기	적절한 수업 활동을 통하여 학습 동기 및 흥미 유발하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	4. 수학적 태도	학습자의 수학 학습에 대한 긍정적 태도 증진시키기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	5. 학습 방법	학습자가 선호하는 학습 활동 및 방법을 반영하여 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			

교수 학습 방법 및 평가	1. 수업 목표 및 내용 반영	수업 목표 및 내용에 적합한 수업 방법을 이용하여 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	2. 문제 해결 활동 반영	수학적 문제 해결 관련 활동을 적절히 활용하여 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	3. 학습자 수준 및 태도 반영	학습자 수준 및 태도에 부합하는 수업 방법을 이용하여 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	4. 질문 및 의사소통 활용	효과적 질문 및 의사소통을 수반하는 수업 방법을 이용하여 수업 진행하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	5. 평가 방법 및 절차 마련	평가 목적에 부합하는 평가 방법 및 절차 마련하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	6. 평가 도구 개발	평가 계획에 준하는 적절한 평가 도구 개발하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	7. 평가 결과 활용	수업 개선 및 학습 처치에 유용하도록 평가 결과 활용하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
수업 상황	1. 도구 및 교구, 자료 활용	학습 목표와 학습자 수준에 적합한 공학적 도구, 교구, 또는 자료를 준비하여 활용하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	2. 교실 환경 및 수업 집단 조성	공학적 도구, 교구, 자료 등의 효율적 활용을 위하여 적절한 수업 집단 및 교실 환경 조성하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	3. 학습 태도 및 수업 분위기 조성	학습자의 적극적 학습 태도 및 긍정적 수업 분위기 유도하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			
	4. 학생 관리 및 수업 상황 대처	학습자의 어려움 및 질문 등을 합리적으로 처리하기	【지식 보유】 측면			
			【수업 계획】 측면			
			【수업 실행】 측면			
			【수업 반성】 측면			

따라서 이 수업 평가 틀은 교사가 자신의 수업 계획 및 진행, 그리고 반성을 통해 수업 개선은 물론, 더 나아가 교사 지식의 확장을 이끌 수 있도록 하는 데 도움을 줄 것이다. 이때 가급적 수업 후 즉각적으로 평가를 실시함으로써 자신의 수업 반성을 통하여 보다 수월하게 수업 개선이 이뤄질 수 있도록 한다. 또 학교 환경 및 수업 상황에 따라 동료 교사들과의 협력, 연구, 논의 등을 통하여 지속적으로 수업 개선을 도모하는 의지와 노력을 갖추도록 한다.

결론적으로 수업 평가 요소는 기본적으로 교사들이 어떤 지식을 보유하고, 그 지식을 토대로 수업을 계획하고 그 계획에 따라 수업을 실행하며, 더 나아가 반성 및 개선 여부에 활용되어야 한다. 만약 한 교사가 교과 내용, 학습자 이해, 교수 학습 방법 및 평가, 수업 상황 등에 관한 지식을 보유한다면, 수업 계획이나 수업 실행에서 교사의 보유된 지식이 고루 반영되어 드러나야 하며, 수업 반성의 측면도 마찬가지이다. 하지만 어떤 교사에 대해 지식 보유, 수업 계획, 수업 실행, 수업 반성 부문을 동시에 판단하기는 무리이다. 일반적으로 지식 보유, 수업 계획, 수업 실행, 수업 반성의 네 부문 중에서 가장 진단하기에 용이하고 필요한 부문은 수업 실행 부문일 것이며, 또한 간편한 수업 평가를 위해서는 수업 실행 부문에 초점을 두어 교사 스스로 자기 평가를 수행하는 것이 좋다.

한마디로 교사가 자신이 수학 및 수학 교육 관련 지식을 어느 정도 보유하고 있는가에 초점을 두어 진단하고자 할 때에는 이 부문만을 스스로 점검하도록 한다. 마찬가지로 수업 계획, 수업 실행, 수업 반성 측면에 초점을 두어 진단하고자 할 때에는 해당 부문만을 선택하여 점검하도록 한다. 여기서 수업 계획과 수업 반성 측면의 평가 요소는 교사 자신의 교사 지식 및 전문성 향상을 위한 '자기 평가' 용으로 활용 가능하다. 한편 수업 실행 측면의 평가 요소는 교사 자신은 물론 동료 교사의 판단에 따라 진단 및 평가가 가능하다. 이때 평가 요소의 활용 단위(즉, 얼마만큼 수업을 진행한 후 평가를 할 것인가)는 교사의 수업 여건이나 상황에 따라 결정하도록 한다.

Ⅷ. 교과서의 구성

01 편찬 방향

이 교과서는 새로 개정된 교육과정에 따라 학생들이 생활 주변에서 일어나는 여러 가지 현상을 수학적으로 생각하고, 주어진 문제를 창의적이고 합리적으로 해결하는 능력을 기를 수 있도록 하기 위하여 다음과 같은 사항에 중점을 두고 엮었다.

첫째, 수학적 개념과 원리를 이해하고 기초 계산을 숙달하게 할 뿐만 아니라 문제 해결력을 기를 수 있도록 하였다.

둘째, 탐구 활동을 통하여 스스로 수학을 체험하게 하여 학생들이 자연스럽게 수학적 내용을 이해하도록 하였다.

셋째, 자신의 생각을 표현하고 토론하며, 다양한 방법으로 수학적 내용을 다른 사람에게 설명할 수 있는 의사소통 능력을 기를 수 있도록 하였다.

넷째, 흥미와 더불어 수학의 아름다움을 발견하고 수학의 유용성을 느낄 수 있도록 하였다.

02 구성과 특징

■ 대단원 도입

단원과 관련된 사진을 제시하고, 사회 현상이나 자연 현상에서 관찰할 수 있거나 적용할 수 있는 이 단원의 수학 내용을 소개함으로써 단원 학습의 의미와 흥미를 불어넣어 주도록 하였다.

■ 준비 학습

각 대단원을 공부하는 데 꼭 필요한 선수 학습 요소와 이에 대한 문제를 제시함으로써 학습에 필요한 선행 지식을 상기하고 학습의 위계를 알 수 있도록 하였다.

■ 중단원 도입

실생활과 관련된 내용을 스토리텔링 형식으로 소개하고 수학적 사고를 유발하는 물음을 제시하여 학습 동기를 유발하도록 하였다.

■ 생각 열기

새로운 내용의 학습을 시작하면서 다른 교과나 실생활과 관련된 내용을 소개하여 학생들에게 학습에 대한 흥미를 불러일으키고 내용 전개의 실마리를 제공하였다. 또한 이를 통하여 수학의 가치와 유용성도 느끼고 창의적인 생각을 키울 수 있도록 스토리텔링 형식을 빌렸다.

■ 탐구 활동

창의력 기르기와 관련된 물음이나 수학적 사고를 유발할 수 있는 물음과 활동을 통하여 새로 도입할 수학의 원리나 개념을 탐구할 수 있도록 하였다.

■ 예제

학습 내용과 관련된 대표적인 문제와 그 풀이 과정을 함께 제시함으로써 학생들의 개념 이해를 더욱 탄탄히 하고 유사 문제를 해결할 수 있도록 하였다.

■ 문제, 발전 문제, 실생활 문제

학습한 내용을 확인하는 기본 문제를 제시함으로써 학생들이 공부한 내용을 바르게 이해하였는지 스스로 점검할 수 있도록 하였다.

■ 창의 UP

생활 주변에서 파악된 문제를 해결하면서 수학적 원리와 법칙을 탐구하고, 수학의 개념을 깊이 생각해 보고 표현할 수 있게 하여 창의적인 생각을 기를 수 있도록 하였다.

■ 사고력 기르기(문제 해결, 추론, 의사소통)

여러 가지 문제를 창의적으로 해결하는 능력을 기르기 위해 생활 주변의 문제 상황을 탐색하고 해결하는 문제를 제시하였다. 또 수학적 사실을 분석하고 정당화하는 문제를 통하여 수학적으로 사고하고 추론하는 능력을 향상시킬 수 있도록 하였다. 더불어 수학적 개념을 말로 표현하고 토론해 보게 함으로써 다른 사람과 효율적으로 의사소통하는 능력을 기를 수 있도록 하였다.

■ 단원 과제

중단원 도입과 관련된 구체적 문제를 통해 생활에 적용되는 수학을 직접 느낄 수 있도록 하였다.

■ 중단원 기초, 기본, 실력

중단원에서 학습한 내용에 대한 문제를 세 가지 수준으로 나누어 제시하였다. 기초에서는 중단원 학습 내용 중 최소 필수 내용을 확인하는 문제를 제공, 기본에서는 중단원 학습 내용 중 기본 개념을 확인하는 문제를 제공, 실력에서는 중단원 학습 내용을 완벽히 이해한 학생들의 수월성 교육에 이용하여 수준별 학습에 도움이 될 수 있도록 하였다.

■ 수행 과제

대단원에서 학습한 내용 중 탐구 소재를 선정하여 실험 또는 분석을 하거나 조사나 관찰을 하여 그 결과를 조직하고 표현함으로써 종합적인 문제 해결 능력을 기를 수 있도록 하였다.

■ 대단원 학습 내용 정리

대단원 학습을 마친 후 이 단원에서 배운 내용을 요약 · 정리하고, 새로 배운 용어와 기호를 제시함으로써 학습 내용을 스스로 점검하고 보완할 수 있도록 하였다.

■ 대단원 평가 문제

대단원 학습을 종합적으로 평가하기 위하여 다양한 유형의 평가 문항들을 제시하였다. 또 마지막 두 문제는 서술형으로 제시하여 수학적 표현 능력을 기를 수 있도록 하였다.

■ 공학적 도구(컴퓨터, 계산기)의 활용

단원의 내용 중에서 공학적 도구를 의미 있게 활용할 수 있는 학습 주제를 선정하여 인터넷, 컴퓨터, 계산기 등을 활용하는 방법을 제시함으로써 학습자의 흥미를 높이고, 효과적인 수업이 될 수 있도록 하였다.

■ 수학 플러스

단원의 끝에 이 단원의 수학 원리와 관련된 과학, 기술, 공학, 예술, 문학, 실생활, 역사 이야기 등을 소개함으로써 수학에 흥미를 불러일으키고, 단원의 학습에 대한 폭넓은 이해와 확장이 가능하도록 하였다.

IX. 연간 지도 계획안

단원	중단원	차시	교과서 쪽수	지도 내용
Ⅰ. 수열의 극한	1. 수열의 극한	1～9	10～27	01 수열의 수렴과 발산 02 극한값의 계산 03 등비수열의 극한값 수준별 학습
	2. 급수	10～16	28～41	01 급수의 수렴과 발산 02 등비급수 03 등비급수의 활용 수준별 학습
	단원 마무리	17～18	42～47	
Ⅱ. 함수의 극한과 연속	1. 함수의 극한	19～27	48～65	01 함수의 극한의 뜻 02 함수의 극한에 대한 성질 수준별 학습
	2. 함수의 연속	28～34	66～79	01 함수의 연속 02 연속함수의 성질 수준별 학습
	단원 마무리	35～36	80～85	
Ⅲ. 다항함수의 미분법	1. 미분계수와 도함수	37～46	86～105	01 미분계수 02 미분계수의 의미와 연속성 03 도함수 수준별 학습
	2. 도함수의 활용	47～61	106～133	01 접선의 방정식 02 평균값 정리 03 함수의 증가와 감소 04 함수의 극대와 극소 05 함수의 그래프 06 방정식과 부등식에의 활용 07 속도와 가속도 수준별 학습
	단원 마무리	62～63	134～141	
Ⅳ. 다항함수의 적분법	1. 부정적분과 정적분	64～77	142～169	01 부정적분 02 구분구적법 03 정적분 04 정적분의 계산 수준별 학습
	2. 정적분의 활용	78～84	170～181	01 넓이 02 속도와 거리 수준별 학습
	단원 마무리	85	182～187	

※ 위 계획안은 학교의 실정이나 학생들의 학습 속도 등에 따라 적절히 조정하여 운영할 수 있다.

X. 참고 문헌

- 강완, 백석윤(1998). 초등수학 교육론. 동명사.
- 교육과학기술부(2007). 수학과 교육과정(교육과학기술부 고시 제 2007-79호 별책 8).
- 교육과학기술부(2009). 2009 개정 교육과정 총론. 교육과학기술부 고시 제2009-41호.
- 교육과학기술부(2011). 수학과 교육과정(교육과학기술부 고시 제 2011-361호 별책 8).
- 신이섭 외(2011). 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정 연구. 한국과학창의재단 정책연구 2011-11.
- 이홍우(1999). 지식의 구조와 교과. 서울: 교육과학사.
- 임찬빈, 이화진, 곽영순, 강대현, 박영석(2004). 수업 평가 기준 개발 연구(Ⅰ): 일반 기준 및 교과(사회, 과학, 영어) 기준 개발. 한국교육과정평가원 연구 보고서 RRI 2004-5.
- 임찬빈, 이화진, 최승현, 오은순, 이경언, 이수정, 노은희, 권순달(2006). 수업 평가 기준 개발 연구(Ⅲ): 일반 기준 및 교과(국어, 수학, 기술·가정, 음악, 초등) 기준 상세화. 한국교육과정평가원 연구 보고서 RRI 2006-3.
- 조지민, 김명화, 최인봉, 송미영, 김수진(2007). 2006년 국가수준 학업성취도 평가 연구: 수학. 한국교육과정평가원 연구 보고 RRE 2007-3-4.
- 박선화, 김명화, 주미경(2010). 수학에 대한 정의적 특성 향상 방안 연구. 한국교육과정평가원 연구 보고 RRI 2010-9.
- 박순경(2010). 2009 개정 교육과정에 따른 교과 교육과정의 개선 방향 탐색. 2009 개정 교육과정에 따른 교과 교육과정 개선 방향 23-72. 국가교육과학기술자문위원회 교육과정위원회.
- 최승현(2002). 수학과 교육 내실화 방안 연구-좋은 수업 사례에 대한 질적 접근-. 한국교육과정평가원.
- 최승현, 황혜정(2007). 수학 수업 평가 기준 개발에 관한 기초 연구, 학교 수학, 9(3), pp.327~352.
- 황혜정, 김홍원, 박경미, 김수환, 김신영, 채선희(1997). 창의력 신장을 돕는 중학교 수학과 학습 평가 방법 연구. 한국교육개발원 연구 보고 CR 97-10-1.
- 황혜정, 나귀수, 최승현, 박경미, 임재훈, 서동엽(2012). 수학교육학신론(2012 증보판). 문음사.
- 황혜정(2012). 수학 수업에서 요구되는 교사 지식에 대한 평가 기준 재탐색. 한국학교수학교육학회 시리즈 E 수학교육논문집, 26(1), pp.29~55.
- Charles, L., Lester, F., & O'Daffer, P.(1987). *How to Evaluate Progress in Problem Solving*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc..
- Danielson Charlotte(1997). *A collection of Performance Tasks and Rubrics*: Middle School Mathematics. Larchmont, NY: Eye O Education, Inc..
- Driver, R., Asoko, H., Leach, J. Mortimer, E. & Scott, P.(1994). *Constructing scientific knowledge in the classroom*. Educational Researcher, 23, (7), 5-12.
- Greeno, J. G.(1978). *Nature of Problem Solving Abilities*, In W. K. Estes(Ed.). *Handbook of learning and cognitive process: Human Information Processing*(pp.239~270). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Krulick, S. & Rudnick, J. A.(1984). *A Sourcebook for Teaching Problem Solving*. Boston: Allyn and Bacon.
- National Council of Teachers of Mathematics(1989). *The Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics(1991). *Mathematics Assessment*, In J. K. Stenmark(Ed.). Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics(1991). *Mathematical Modeling in the Secondary School Curriculum*, In Frank Swetz and J. S. Hartzler(Eds.). Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics(2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author.
- Niss, M.(1989). *Aims and Scope of Applications and Modeling in Mathematics Curricula*, In W. Blum et. al.(Eds.), *Application and Modeling in Learning and Teaching Mathematics*(pp. 22~31). West Sussex: Ells Horwood Limited.
- Pólya, G.(1957), *How to Solve it*. 2nd ed., New York: Doubleday & Company, Inc..
- Vosniadou, S.(2001). *How children learn. Educational Practices series*. Monograph No. 7. International Bureau of Education(IBE).

차례

각론

Ⅰ. 수열의 극한	68
Ⅱ. 함수의 극한과 연속	112
Ⅲ. 다항함수의 미분법	154
Ⅳ. 다항함수의 적분법	216
수학 용어	268

전파망원경은 먼 우주로부터 오는 전파를 수신하고 있다.

수열의 극한

|준|비|학|습|

수학 Ⅱ 수열

1 다음 수열의 일반항 a_n을 구하여라.

(1) $-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ \cdots$ $a_n=(-1)^n \cdot n$

(2) $\frac{1}{3},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{6},\ \cdots$ $a_n=\frac{n}{n+2}$

수학 Ⅱ 무리식

2 다음 무리식의 분자 또는 분모를 유리화하여라.

(1) $\sqrt{x}-\sqrt{x-2}$ $\frac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}}$

(2) $\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$ $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$

수학 Ⅱ 등비수열의 합

3 다음 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구하여라.

(1) $3,\ 6,\ 12,\ 24,\ \cdots$ $3(2^n-1)$

(2) $\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots$ $1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

단원의 지도 목표

1. 수열의 극한

① 수열의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있게 한다.
② 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있게 한다.
③ 등비수열의 극한값을 구할 수 있게 한다.

2. 급수

① 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 활용할 수 있게 한다.
② 등비급수의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있게 한다.
③ 등비급수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

① 수열의 극한에 대한 정의와 성질은 직관적으로 이해하는 수준에서 다룬다.
② 수열의 수렴, 발산은 수렴의 정의와 성질을 바탕으로 예측하고 설명해 보게 한다.
③ 수열이나 급수의 수렴, 발산은 공학적 도구를 활용하여 이해하게 할 수 있다.
④ 기호 $\lim_{n\to\infty} S_n$은 교수 · 학습 상황에서 다루어질 수 있다.

교수 · 학습의 계열

선수 학습	본 단원	후속 학습
[수학 Ⅰ] 인수분해	1. 수열의 극한 수열의 수렴과 발산 극한값의 계산 등비수열의 극한값	[미적분 Ⅰ] 함수의 극한과 연속 다항함수의 미분법 다항함수의 적분법
[수학 Ⅱ] 유리함수와 무리함수	2. 급수 급수의 수렴과 발산 등비급수 등비급수의 활용	[미적분 Ⅱ] 지수함수와 로그함수의 극한 삼각함수의 극한

단원의 차시별 지도 계획

중단원	소단원	차시	교과서(쪽)	지도 내용	용어와 기호
단원의 개관		1~3	10~11	• 단원의 개관 • 준비 학습	
1. 수열의 극한	중단원 도입		12	• 거울을 마주 보고 세우면 상이 무한히 맺힌다.	
	01 수열의 수렴과 발산		13~16	• 수열의 수렴과 발산	극한(값), 수렴, 발산, 무한대, ∞, $\lim_{n\to\infty} a_n$
	02 극한값의 계산	4~6	17~20	• 수열의 극한에 대한 기본 성질 • 수열의 극한값의 대소 관계	
	03 등비수열의 극한값	7~8	21~24	• 등비수열의 극한값 • 등비수열 $\{r^n\}$의 수렴, 발산	
	수준별 학습	9	25~27	• 중단원 확인 학습 문제	
2. 급수	중단원 도입	10~12	28	• 식물원의 유리 벽은 지구의 대기와 같다.	
	01 급수의 수렴과 발산		29~32	• 급수의 수렴과 발산 • 급수와 일반항	급수, 부분합, 급수의 합, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
	02 등비급수	13~14	33~36	• 등비급수의 수렴과 발산 • 급수의 성질	등비급수
	03 등비급수의 활용	15	37~38	• 등비급수의 활용	
	수준별 학습	16	39~41	• 중단원 확인 학습 문제	
단원 마무리		17~18	42~47	• 수행 과제 • 대단원 학습 내용 정리 • 대단원 평가 문제 • 수학 플러스	

단원의 이론적 배경

1. 수열의 극한의 정리

고등학교 수학 교육과정에서는 극한의 개념을 예를 통하여 직관적인 방법으로 지도하지만 극한의 엄밀한 정의인 $\varepsilon-\delta$식의 극한의 정의는 다음과 같다.

(1) 수열 $\{a_n\}$과 실수 α에 대하여 다음이 성립할 때, 수열 $\{a_n\}$은 α에 수렴한다고 한다.

> 임의의 양수 ε에 대하여 적당한 자연수 N이 존재하여 $n>N$일 때 $|a_n-\alpha|<\varepsilon$이다.
> 이때, α를 수열 $\{a_n\}$의 극한이라고 하며, 기호로 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$와 같이 나타낸다.

(2) 수열 $\{a_n\}$에 대하여 다음이 성립할 때, 수열 $\{a_n\}$은 양의 무한대로 발산한다고 한다.

> 임의의 양수 M에 대하여 적당한 자연수 N이 존재하여 $n>N$일 때 $a_n>M$이다.
> 이때, 기호로 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$와 같이 나타낸다.

2. 수열의 극한에 대한 기본 성질의 증명

> 수열 $\{a_n\}$이 수렴하면 그 극한은 오직 하나뿐이다.

증명 두 실수 α와 β를 수열 $\{a_n\}$의 서로 다른 극한이라 하고 $|\alpha-\beta|=\varepsilon$이라고 하자. 그러면 $\frac{\varepsilon}{2}$은 양수이므로 다음을 만족하는 적당한 자연수 N_1과 N_2가 존재한다.

$n>N_1$이면 $|a_n-\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}$, $n>N_2$이면 $|a_n-\beta|<\frac{\varepsilon}{2}$

이다. $N=\max\{N_1,\ N_2\}$라고 하면 다음이 성립한다.
(여기서 $\max\{N_1,\ N_2\}$는 N_1, N_2 중 작지 않은 값을 말한다.)

$n>N$이면

$$|\alpha-\beta|=|(\alpha-a_n)+(a_n-\beta)|\le|a_n-\alpha|+|a_n-\beta|<\varepsilon$$

이다. 이는 $|\alpha-\beta|=\varepsilon$이라는 사실에 모순이다.
따라서 수열 $\{a_n\}$이 수렴하면 그 극한은 오직 하나뿐이다.

> 수렴하는 수열은 유계이다.

증명 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$라 하고 $\varepsilon=1$로 놓자. 그러면 다음을 만족하는 적당한 자연수 N이 존재한다.

$n>N$이면 $|a_n-\alpha|<\varepsilon=1$, 즉 $|a_n|<|\alpha|+1$이다.

$M=\max\{|a_1|,\ |a_2|,\ |a_3|,\ \cdots,\ |a_N|,\ |\alpha|+1\}$이라고 하면 모든 자연수 n에 대하여 $|a_n|\le M$을 만족한다.
따라서 수열 $\{a_n\}$은 유계이다.

> 수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$에 대하여
> $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\beta$일 때, 다음이 성립한다.
> (1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\alpha\pm\beta$(복부호동순)
> (2) $\lim\limits_{n\to\infty} ka_n=k\alpha$(단, k는 상수)　(3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_nb_n=\alpha\beta$
> (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\alpha}{\beta}$(단, $b_n\ne0$, $\beta\ne0$)

증명 (1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\beta$이므로 임의의 양수 ε에 대하여 다음을 만족하는 적당한 자연수 N_1과 N_2가 존재한다.

$n>N_1$이면 $|a_n-\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}$,

$n>N_2$이면 $|b_n-\beta|<\frac{\varepsilon}{2}$이다.

$N=\max\{N_1,\ N_2\}$라고 하면 다음이 성립한다.

$n>N$이면

$$\begin{aligned}|(a_n+b_n)-(\alpha+\beta)|&=|(a_n-\alpha)+(b_n-\beta)|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

이다.

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha+\beta$이다.

마찬가지 방법으로 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\alpha-\beta$임을 증명할 수 있다.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\alpha$이므로 임의의 양수 ε에 대하여 다음을 만족하는 적당한 자연수 N이 존재한다.

$n>N$이면 $|a_n-\alpha|<\frac{\varepsilon}{|k|}$이다.

그러므로 임의의 양수 ε에 대하여 $n>N$이면

$|ka_n-k\alpha|=|k||a_n-\alpha|<|k|\cdot\dfrac{\varepsilon}{|k|}=\varepsilon$이다.

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}ka_n=k\alpha$(단, k는 상수)이다.

(3) 부등식

$$\begin{aligned}|a_nb_n-\alpha\beta|&=|(a_nb_n-a_n\beta)+(a_n\beta-\alpha\beta)|\\&\le|a_nb_n-a_n\beta|+|a_n\beta-\alpha\beta|\\&\le|a_n||b_n-\beta|+|\beta||a_n-\alpha|\end{aligned}$$

가 성립하고 수렴하는 수열은 유계이므로 $|a_n|\le M$인 $M(M>0)$이 존재한다.

또한 임의의 양수 ε에 대하여 다음을 만족하는 자연수 N이 존재한다.

$n>N$이면

$|a_n-\alpha|<\dfrac{\varepsilon}{2(|\beta|+1)}$, $|b_n-\beta|<\dfrac{\varepsilon}{2M}$이다.

그러므로 $n>N$이면

$|a_nb_n-\alpha\beta|<M\cdot\dfrac{\varepsilon}{2M}+|\beta|\cdot\dfrac{\varepsilon}{2(|\beta|+1)}<\varepsilon$

이다. 따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=\alpha\beta$이다.

(4) $\dfrac{a_n}{b_n}=a_n\cdot\dfrac{1}{b_n}$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{\beta}$임을 보이면 (3)에 의하여 성립한다.

먼저 수열 $\{b_n\}$이 β에 수렴하므로 $\dfrac{|\beta|}{2}$에 대하여 다음을 만족하는 자연수 N_1이 존재한다.

$n>N_1$이면 $|b_n-\beta|<\dfrac{|\beta|}{2}$이다.

그런데 $|\beta|-|b_n|\le|b_n-\beta|$이므로 모든 $n>N_1$에 대하여 $|b_n|>\dfrac{|\beta|}{2}$이다.

$m=\min\left\{|b_1|, |b_2|, |b_3|, \cdots, |b_{N_1}|, \dfrac{|\beta|}{2}\right\}$라고 하면 모든 자연수 n에 대하여 $|b_n|\ge m$이고 $b_n\ne0$이므로 $m>0$이다.

또한 수열 $\{b_n\}$이 β에 수렴하므로 임의의 양수 ε에 대하여 다음을 만족하는 자연수 N이 존재한다.

$n>N$이면 $|b_n-\beta|<\varepsilon m|\beta|$이다. 그러므로

$n>N$이면 $\left|\dfrac{1}{b_n}-\dfrac{1}{\beta}\right|\le\left|\dfrac{\beta-b_n}{m|\beta|}\right|<\varepsilon$이다.

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ (단, $b_n\ne0$, $\beta\ne0$)이다.

3. 급수

급수의 수렴, 발산을 판정하는 방법에는 교과서에서 제시한 방법 외에도 다음과 같은 방법들이 있다.

(1) 비교판정법

$0\le a_n\le b_n$일 때, 급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴하면 급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하고, 급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$이 발산하면 급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$도 발산한다.

(2) 근판정법

양항급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$에서 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=r$가 존재할 때, $r<1$이면 급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하고 $r>1$이면 급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$이 발산한다.

(3) 비율판정법

수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이고, $0<r<1$일 때, 모든 n에 대하여 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\le r$이면 급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$은 수렴하고, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\ge r$이면 급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$은 발산한다.

(4) 적분판정법

연속함수 $f:[1, \infty)\to R$가 단조감소함수이고 항상 $f(x)>0$일 때, 급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$이 수렴할 필요충분조건은 적분 $\int_1^{\infty}f(x)dx=\lim\limits_{b\to\infty}\int_1^{b}f(x)dx$가 수렴하는 것이다.

차시별 교수 · 학습 과정안 (예시)

대단원	I. 수열의 극한	쪽수	교과서 10~14쪽
소단원	1. 수열의 극한　01 수열의 수렴과 발산	차시	1/18
학습 목표	수열의 수렴의 뜻을 안다.		

단계	학습 과정	교수 · 학습 활동	교수 · 학습상의 유의점
도입	선수 학습 확인	⊙ 준비 학습을 이용하여 이번 단원의 학습에 필요한 기초 개념을 간단히 확인, 점검한다.	모둠 학습을 위한 소집단을 사전에 편성한다.
	동기 유발	⊙ 중단원 도입 글을 읽고 단원 과제를 발문하여 이번 중단원을 학습하면서 이 과제를 해결할 수 있음을 암시한다.	
	학습 목표 제시	⊙ 이번 차시의 학습 목표를 제시한다. • 수열의 수렴의 뜻을 안다.	
전개	탐구 활동	⊙ 생각 열기를 읽고, 탐구 활동을 모둠별로 해결하도록 한다. ⊙ 탐구 활동 결과를 발표하게 하고, 보충 설명을 한다.	
	개념 학습	⊙ 학습 내용 설명 **수열의 수렴** 수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값이 일정한 수 α에 한없이 가까워지면 수열 $\{a_n\}$은 α에 수렴한다고 한다. 이때 α를 수열 $\{a_n\}$의 극한값 또는 극한이라 하고, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다. $\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha$ 또는 $n \to \infty$일 때 $a_n \to \alpha$	수열이 어떻게 변하는지 그래프를 통해 직관적으로 이해하도록 지도한다. 극한과 관련된 새로운 기호를 올바르게 사용하도록 지도한다.
	문제 해결	⊙ 문제 1번을 풀게 한다. 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다.	
정리	학습 내용 정리	⊙ 본시의 학습 내용을 정리한다.	
	차시 예고	⊙ 다음 차시를 예고한다. • 양의 무한대 또는 음의 무한대로 발산하는 수열의 의미를 안다.	

차시별 교수 · 학습 과정안(예시)

대단원	I. 수열의 극한	쪽수	교과서 15쪽
소단원	1. 수열의 극한 01 수열의 수렴과 발산	차시	2/18
학습 목표	양의 무한대 또는 음의 무한대로 발산하는 수열의 의미를 안다.		

단계	학습 과정	교수 · 학습 활동	교수 · 학습상의 유의점
도입	선수 학습 확인 동기 유발 학습 목표 제시	◎ 이전 차시에 학습한 내용을 간단히 확인, 점검한다. ◎ 학습 동기 유발을 위한 발문을 한다. 예 두 수열 $\{n^2\}$과 $\{1-2n\}$의 항을 나열하여 보자. ◎ 이번 차시의 학습 목표를 제시한다. • 양의 무한대 또는 음의 무한대로 발산하는 수열의 의미를 안다.	
전개	개념 학습 문제 해결	◎ 학습 내용 설명 **수열의 발산** 어떤 수열이 수렴하지 않을 때, 그 수열은 발산한다고 한다. **양의 무한대로 발산** 수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값이 한없이 커지면 수열 $\{a_n\}$은 양의 무한대로 발산한다고 하며, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다. $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$ 또는 $n\to\infty$일 때 $a_n\to\infty$ **음의 무한대로 발산** 수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 수열 $\{a_n\}$은 음의 무한대로 발산한다고 하며, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다. $\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$ 또는 $n\to\infty$일 때 $a_n\to-\infty$ ◎ 문제 2번을 풀게 한다. 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다.	수렴하는 경우와 달리 발산하는 경우에는 여러 가지가 있음을 설명한다.
정리	학습 내용 정리 차시 예고	◎ 본시의 학습 내용을 정리한다. ◎ 다음 차시를 예고한다. • 진동하는 수열의 의미를 안다.	

1 수열의 극한

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 수열의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있게 한다.

② 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있게 한다.

③ 등비수열의 극한값을 구할 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
01 수열의 수렴과 발산	수열의 수렴과 발산
02 극한값의 계산	수열의 극한에 대한 기본 성질
	수열의 극한값의 대소 관계
03 등비수열의 극한값	등비수열의 극한값 등비수열 $\{r^n\}$의 수렴, 발산
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

교과서 12 쪽

1 수열의 극한

거울을 마주 보고 세우면 상이 무한히 맺힌다.

두 평면거울을 마주 보도록 세워 놓은 후 그 사이에 물체를 놓고 한쪽 거울을 바라보면 한쪽 거울에 맞은편 거울이 반사되어 여러 개의 물체가 줄지어 늘어선 모습을 볼 수 있다.

이것은 물체가 거울에 두 번 반사되어 다시 한쪽 거울에 보이는 상이 무한히 반복되기 때문이다.

이와 같은 현상은 우리의 일상생활에서도 쉽게 접할 수 있다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 24쪽

마주 보고 있는 두 평면거울 앞에 놓은 물체의 크기는 어떻게 보일까?

들어가면서

이 단원에서 배우는 극한의 개념은 학생들이 직관적으로 받아들이도록 지도한다. '한없이 커진다.'거나 '한없이 가까워진다.'와 같은 물리적 직관에 의존하는 표현을 사용하는데 이러한 직관에 의존한 표현으로부터 수열의 수렴, 발산의 뜻을 이해할 수 있도록 하고 극한에 대한 기본 성질을 익힐 수 있도록 다룬다.

즉, 수열의 극한을 구하고 활용할 수 있는 수준까지 익힐 수 있도록 한다.

성취 기준과 성취 수준

성취 기준		성취 수준
1. 수열의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.	상	수열의 수렴, 발산을 판별할 수 있다.
	중	$a_n=\dfrac{n}{n+1}$, $b_n=n^2$과 같은 간단한 수열의 수렴, 발산을 판별할 수 있다.
	하	수열의 수렴, 발산의 뜻을 말할 수 있다.
2. 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.	상	수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하여 극한값을 구하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
	중	수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하여 $a_n=\dfrac{n}{n+1}$, $b_n=n^2$과 같은 간단한 수열의 극한값을 구할 수 있다.
	하	수렴하는 두 수열의 합, 차, 곱, 몫의 극한값을 구할 수 있다.
3. 등비수열의 극한값을 구할 수 있다.	상	등비수열의 합, 차, 곱, 몫의 극한값을 구할 수 있다.
	중	$a_n=2^n$, $b_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$과 같은 간단한 등비수열의 극한값을 구할 수 있다.
	하	등비수열 $\{r^n\}$의 수렴, 발산 조건을 말할 수 있다.

교과서 13 쪽

01 수열의 수렴과 발산

● 수열의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.

수열의 수렴과 발산은 무엇인가?

생각 열기

탐구 활동

크기가 1인 빵 한 덩이를 사람 수에 따라 똑같이 나누어 먹으려고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.

1. 다음 표를 완성하여 보자.

빵을 나누어 먹는 사람 수(명)	1	2	3	4	5	…
한 사람이 먹는 빵 조각의 크기	1	$\frac{1}{2}$				…

2. 1의 표를 이용하여 빵을 나누어 먹는 사람 수가 점점 많아지면 한 사람이 먹는 빵 조각의 크기는 어떻게 변할지 추측하여 보자.

❶ 수열 $\{a_n\}$이

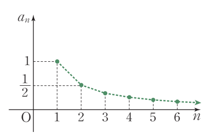
$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots$$

일 때,

$$a_{10}=\frac{1}{10},\ a_{100}=\frac{1}{100},\ a_{1000}=\frac{1}{1000},\ \cdots$$

과 같이 n이 한없이 커짐에 따라 일반항 a_n의 값은 양수이면서 한없이 작아짐을 추측할 수 있다.

오른쪽 그림과 같이 그래프를 이용하면 n이 한없이 커질 때, a_n의 값은 0에 가까워짐을 확인할 수 있다.



새로 나온 용어와 기호

- 극한(값)(極限, limit(value))
- 수렴(收斂, convergence)
- 발산(發散, divergence)
- 무한대(無限大, infinity)
- ∞, $\lim_{n\to\infty} a_n$

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 빵을 사람의 수에 따라 나누어 보는 시행을 한없이 반복할 때 빵 조각의 크기가 어떻게 되는지 관찰과 실험을 통해 극한의 개념을 이해하게 하는 활동이다.

1. $\mathbf{\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5}}$

2. 빵을 나누어 먹는 사람의 수가 점점 많아질수록 한 사람이 먹는 빵의 양이 계속 적어진다. 즉, **한 사람이 먹는 빵의 양이 0에 가까워진다.**

01 수열의 수렴과 발산

소단원 지도 목표

① 수열의 수렴, 발산의 뜻을 알게 한다.

② 수열의 수렴, 발산을 판별할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 수열의 극한에 대한 정의와 성질은 직관적으로 이해하는 수준에서 다룬다.

2. 수열의 수렴, 발산은 수렴의 정의와 성질을 바탕으로 예측하고 설명해 보게 한다.

3. 발산하는 수열에는 양의 무한대로 발산, 음의 무한대로 발산, 진동의 세 가지 경우가 있음을 알도록 지도한다.

4. ∞는 수가 아니고 한없이 커지는 상태를 나타내는 기호임을 강조하여 지도한다.

본문 해설

❶ 수열 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$은 $f(n)=\frac{1}{n}$로 정의된 자연수 전체의 집합 N에서 0이 아닌 실수 전체의 집합 R로의 함수 f로 나타낼 수 있다.

따라서 함수 f의 그래프를 통해 예측해 볼 수 있다.

지/도/자/료

$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$일 때 다음 부등식을 만족하는 n의 값을 찾아보게 한다.

$$|a_n-\alpha|<1,\ |a_n-\alpha|<\frac{1}{10},\ |a_n-\alpha|<\frac{1}{100},\ \cdots$$

각 경우에 유한개를 제외한 모든 항에 대하여 부등식이 성립함을 알게 하여 극한의 뜻을 구체적으로 확인시킨다.

본문 해설

❶ 수렴은 수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때 a_n의 값이 일정한 값에 한없이 가까워지는 것이다.

즉, $n \to \infty$에서 ∞는 수가 아니고 한없이 커지는 상태를 나타내는 기호이고 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$은 $\dfrac{n+1}{n}$의 값이 1이라는 의미가 아니라 1에 한없이 가까워진다는 것을 의미한다.

교과서 14 쪽

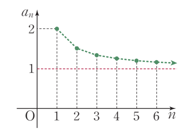
수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값이 어떻게 변하는지 알아보자.

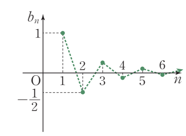
예를 들어 다음 두 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$을 생각하여 보자.

$\{a_n\}$: $2, \dfrac{3}{2}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{5}{4}, \cdots, \dfrac{n+1}{n}, \cdots$

$\{b_n\}$: $1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{8}, \cdots, \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}, \cdots$

이 수열을 그래프로 나타내면 각각 다음과 같다.





❶ 위의 그래프에서 n이 한없이 커지면 수열 $\{a_n\}$의 일반항 $\dfrac{n+1}{n}$의 값은 1에 한없이 가까워지고, 수열 $\{b_n\}$의 일반항 $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$의 값은 0에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.

일반적으로 수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값이 어떤 실수 α에 한없이 가까워지면 수열 $\{a_n\}$은 α에 **수렴**한다고 한다. 이때 α를 수열 $\{a_n\}$의 **극한값** 또는 **극한**이라 하고, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha \quad \text{또는} \quad n\to\infty\text{일 때 } a_n\to\alpha$$

즉, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=0$이다.

여기서 $n\to\infty$에 있는 기호 ∞를 **무한대**라고 읽는다.

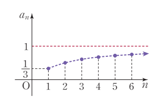
특히 수열 $\{a_n\}$에서 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=c$ (c는 상수)일 때, 수열 $\{a_n\}$은 c에 수렴한다고 하며, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} c=c$$

● 기호 lim은 극한을 뜻하는 limit의 약자이고, '리미트'라고 읽는다.

● ∞는 일정한 값을 나타내는 수가 아니고 한없이 커짐을 나타내는 기호이다.

보기 n이 한없이 커질 때, 수열 $\left\{\dfrac{n}{n+2}\right\}$의 일반항 $\dfrac{n}{n+2}$의 값은 1에 한없이 가까워지므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+2}=1$이다.



문제 1 다음 수열의 극한값을 구하여라.

(1) $1, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{16}, \cdots, \dfrac{1}{n^2}, \cdots$

(2) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{4}, \dfrac{7}{8}, \dfrac{17}{16}, \cdots, 1+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n, \cdots$

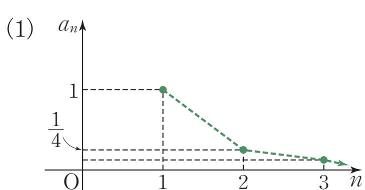
(3) $-1, -1, -1, -1, \cdots, -1, \cdots$

1

목표| 그래프를 이용하여 수열의 극한값을 구할 수 있게 한다.

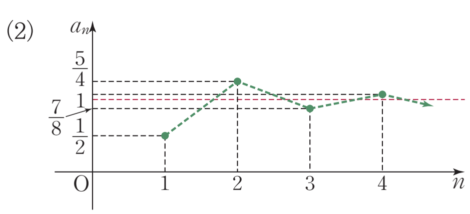
풀이|

(1)



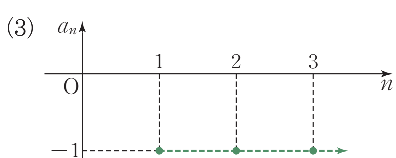
0에 한없이 가까워지므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=\mathbf{0}$이다.

(2)



1에 한없이 가까워지므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{1+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}=\mathbf{1}$이다.

(3)



항상 -1이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)=\mathbf{-1}$이다.

읽/기/자/료 수학자 코시

코시(Cauchy, A. L.; 1789~1857)

1789년 프랑스의 파리에서 태어난 그는 해석학과 치환군(한 집합의 순서수열들을 원소로 하는 군)을 개척한 근대의 가장 위대한 수학자 중 한 사람이다. 그는 미적분학의 원칙들을 분명히 했고, 해석학의 필수 개념인 극한과 연속의 개념들을 이용해 미적분학의 원리들을 개발하여 기초를 튼튼히 했다. 1848년 나폴레옹 3세가 즉위한 뒤에 소르본대학 교수가 되어 평생 이 교수직에 있었다. 주요 업적으로 복수변수함수론과 해석학에서의 엄밀성을 주장한 것을 들 수 있다. 복소변수함수론은 코시에 의해 유체 역학과 공기역학에서의 유용한 도구로부터 수학연구의 독립된 분야가 되었으며, 이는 오늘날 물리학에서 항공학까지 이르는 응용수학에 필수적인 것이다. "해석학 교정"에서는 현재 교과서에서 쓰이고 있는 미적분학의 기초를 남겼으며, 1838년에는 미분방정식의 풀이에 관하여 최초의 존재 증명을 하였다.

교과서 15 쪽

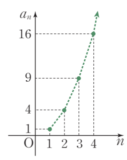
수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, 수렴하지 않는 경우를 알아보자.

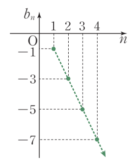
예를 들어 다음 두 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$을 생각하여 보자.

$\{a_n\}$: $1, 4, 9, 16, \cdots, n^2, \cdots$

$\{b_n\}$: $-1, -3, -5, -7, \cdots, 1-2n, \cdots$

이 수열을 그래프로 나타내면 각각 다음과 같다.





위의 그래프에서 n이 한없이 커지면 수열 $\{a_n\}$의 일반항 n^2의 값은 한없이 커지고, 수열 $\{b_n\}$의 일반항 $1-2n$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커짐을 알 수 있다.

❶ 따라서 두 수열은 모두 수렴하지 않는다.

이와 같이 어떤 수열이 수렴하지 않을 때, 그 수열은 **발산**한다고 한다.

일반적으로 수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값이 한없이 커지면 수열 $\{a_n\}$은 양의 무한대로 발산한다고 하며, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty \quad \text{또는} \quad n\to\infty\text{일 때 } a_n\to\infty$$

❷ $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$는 극한값이 ∞라는 뜻이 아니다. 이때에는 극한값이 없다고 한다.

또 수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 수열 $\{a_n\}$은 음의 무한대로 발산한다고 하며, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty \quad \text{또는} \quad n\to\infty\text{일 때 } a_n\to-\infty$$

즉, $\lim_{n\to\infty} n^2=\infty$, $\lim_{n\to\infty} (1-2n)=-\infty$이다.

보기 (1) 수열 $\{2^{n-1}\}$은 n이 한없이 커질 때, 일반항 2^{n-1}의 값도 한없이 커지므로 $\lim_{n\to\infty} 2^{n-1}=\infty$이다.

(2) 수열 $\{-n^2\}$은 n이 한없이 커질 때, 일반항 $-n^2$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 $\lim_{n\to\infty} (-n^2)=-\infty$이다.

문제 2 다음 수열의 수렴, 발산을 조사하여라.

(1) $50, 40, 30, 20, \cdots, 10(6-n), \cdots$ (2) $3, 8, 13, 18, \cdots, 5n-2, \cdots$

본문 해설

❶ 수렴하지 않는 수열을 발산한다고 한다. 그런데 수렴하는 경우와 달리 발산하는 경우에는 여러 가지가 있다. 앞에서 배운 수렴하는 경우와 마찬가지로 발산하는 경우에도 그래프를 통하여 직관적으로 이해하도록 한다.

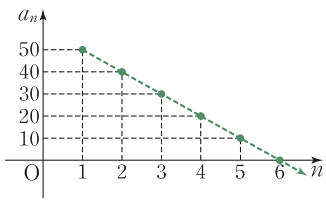
❷ $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$는 극한값이 ∞라는 뜻이 아니다. 이것은 n이 한없이 커짐에 따라 a_n의 값도 양수이면서 한없이 커진다는 것을 뜻한다.

마찬가지로 $\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$도 극한값이 $-\infty$라는 뜻이 아니다. 이것은 n이 한없이 커짐에 따라 a_n의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커진다는 것을 뜻한다.

2

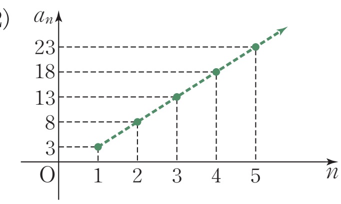
목표| 그래프를 이용하여 수열의 수렴, 발산을 조사할 수 있게 한다.

풀이| (1)



따라서 (음의 무한대로) 발산한다.

(2)



따라서 (양의 무한대로) 발산한다.

읽/기/자/료 수학자 바이어슈트라스

바이어슈트라스 (Weierstrass, K.T.W. ; 1815~1897)

1815년 독일의 뮌스턴에서 태어난 그는 현대 함수 이론의 창시자 중 한 사람이다. 그는 해석학의 수론화로 알려진 프로그램을 구상해 이 가운데 대부분을 성취했다. 해석학의 수론화는 실수 체계가 정밀하게 발달하도록 기초를 제공했다. 그는 연속이지만 어떤 점에서도 도함수를 갖지 않는 함수를 개발하였는데, 명백히 미분가능한 함수가 갖는 이런 특이성은 직관에만 의존하는 해석학파들을 놀라게 했다. 1856년 베를린에 있는 왕립 종합기술학교는 그를 위해 자리를 마련했다.

현대 해석학의 아버지로 알려진 그는 급수수렴 판정법을 고안했고, 주기함수, 실변수함수, 타원함수, 아벨함수, 수렴하는 무한곱, 변분법이론 등에 기여했다. 바이어슈트라스는 앞에서 말한 원함수론이나 아벨함수 이외에 대수적 미분방정식에 대한 논문도 썼다. 그의 복수변수의 해석함수에 대한 개념은 엄밀한 해석적 표현을 중요시하여 리만(Riemann, G. F. B. ; 1826~1866)의 기하학적 물리학적 직관에 의존한 개념과 비교된다.

바이어슈트라스는 학술지에 거의 논문을 내지 않고 대부분의 연구는 강의에서 구체화되었는데, 그의 학문적 업적은 "논문전집 Gesammelte Abhandlungen 8 vol."(1894~1927)으로 모아져 출판되었다.

본문 해설

❶ $\{a_n\}$: $-1, 1, -1, 1, \cdots, (-1)^n, \cdots$은 -1과 1이 계속 교대로 나타난다. 이것은 -1로도 수렴하지 않고 1로도 수렴하지 않는다. 또, 양의 무한대 또는 음의 무한대로도 발산하는 것이 아니다.

한편, $\{b_n\}$: $-\frac{1}{2}, 1, -\frac{3}{2}, 2, \cdots, (-1)^n \cdot \frac{n}{2}, \cdots$은 n이 홀수일 때 음의 무한대로 발산하고 n이 짝수일 때 양의 무한대로 발산한다. 따라서 이 수열은 양 또는 음의 어느 한 쪽으로 발산한다고 할 수 없다.

위와 같은 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$을 진동한다고 한다.

❷ 진동하는 경우로 수열 $\{(-2)^n\}$과 같이 항의 번호가 커짐에 따라 항의 부호가 번갈아 바뀌고 절댓값이 한없이 커지는 경우가 있다.

교과서 16 쪽

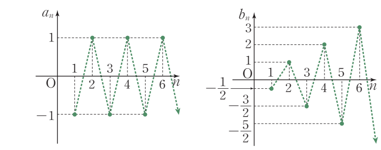
한편 수렴하지도 않고 양의 무한대 또는 음의 무한대로 발산하지도 않는 수열이 있다.

❶ 예를 들어 다음 두 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$을 생각하여 보자.

$\{a_n\}$: $-1, 1, -1, 1, \cdots, (-1)^n, \cdots$

$\{b_n\}$: $-\frac{1}{2}, 1, -\frac{3}{2}, 2, \cdots, (-1)^n \cdot \frac{n}{2}, \cdots$

이 수열을 그래프로 나타내면 각각 다음과 같다.



위의 그래프에서 n이 한없이 커지면 두 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$은 수렴하지도 않고, 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않음을 알 수 있다.

이와 같은 수열은 진동한다고 하며, 진동하는 수열은 발산하는 수열이다.

수열의 수렴, 발산

(1) 수렴 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ (단, α는 일정한 값)

(2) 발산 $\begin{cases} \lim_{n\to\infty} a_n = \infty \text{ (양의 무한대로 발산)} \\ \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty \text{ (음의 무한대로 발산)} \\ \text{진동} \end{cases}$

❷ **보기** 수열 $\{(-2)^n\}$은 n이 한없이 커질 때, 일반항 $(-2)^n$의 절댓값은 한없이 커지고, 그 부호는 음과 양이 교대로 나타나므로 발산(진동)한다.

문제 3 다음 수열의 수렴, 발산을 조사하여라.

(1) $\{(-1)^n+1\}$　　(2) $\{2(-3)^n+1\}$

사고력 기르기

추론
의사소통
▶문제 해결

다음 수열 $\{a_n\}$이 0에 수렴할 때, 이 수열의 짝수 번째 항들을 나열하여 만든 수열 $\{a_{2n}\}$도 0에 수렴한다. 같은 방법으로 두 수열 $\{a_{2n-1}\}$과 $\{a_{n+1}\}$도 수렴하는지 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하여 보자.

$\{a_n\}$: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots \xrightarrow[\text{항들을 나열한다.}]{\text{짝수 번째}} \{a_{2n}\}$: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{2n}, \cdots$

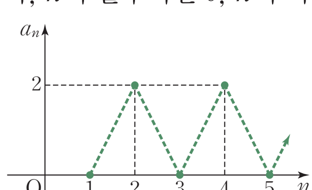
3

목표| 그래프를 이용하여 수열의 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $a_n=(-1)^n+1$이라 하면

$a_1=0,\ a_2=2,\ a_3=0,\ a_4=2,\ \cdots$

즉, n이 홀수이면 0, n이 짝수이면 2가 된다.



따라서 발산(진동)한다.

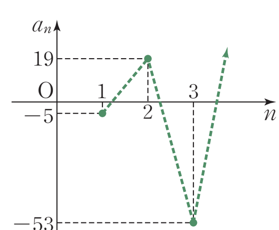
(2) $a_n=2(-3)^n+1$이라 하면

$a_1=-6+1=-5,\ a_2=18+1=19,$

$a_3=-54+1=-53,\ a_4=162+1=163,$

$\cdots$

즉, n이 커짐에 따라 음수와 양수가 교대로 나온다.



따라서 발산(진동)한다.

사고력 기르기 문제 해결

출제 의도| 수렴하는 수열 안에서 새로운 규칙에 의한 항으로 만들어지는 수열에 대하여 수렴, 발산을 조사하고 수렴하면 그 극한값을 구할 수 있게 지도한다.

풀이| $\{a_{2n-1}\}$: $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \cdots, \frac{1}{2n-1}, \cdots$이므로

$\lim_{n\to\infty} a_{2n-1}=0$

$\{a_{n+1}\}$: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n+1}, \cdots$이므로 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=0$

교과서 17 쪽

02 극한값의 계산

● 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하고, 이를 이용하여 극한값을 구할 수 있다.

수열의 극한에 대한 기본 성질은 어떠한가?

생각 열기

탐구 활동 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 일반항이 $a_n=1+\frac{1}{n}$, $b_n=3+\frac{3}{n}$일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n$과 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)$의 값을 비교하면 다음과 같다.

$\lim_{n\to\infty} a_n=1$, $\lim_{n\to\infty} b_n=3$이므로
$\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n=4$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}\left(4+\frac{4}{n}\right)=4$$

● 문자와 문자, 문자와 수, 수와 수 사이의 '·'은 곱을 의미한다.
예 $(-a)\cdot(-a)=(-a)\times(-a)$

위와 같은 방법으로 주어진 두 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$에 대하여 다음의 값을 비교하여 보자.

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)$과 $\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty} b_n$ **2.** $\lim_{n\to\infty} 3a_n$과 $3\lim_{n\to\infty} a_n$

3. $\lim_{n\to\infty} a_nb_n$과 $\lim_{n\to\infty} a_n\cdot\lim_{n\to\infty} b_n$ **4.** $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$과 $\frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 각 항의 합, 차, 실수배, 곱, 몫을 항으로 하는 수열의 극한에 대하여 알아보자.

02 극한값의 계산

소단원 지도 목표

① 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하게 한다.
② 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있게 한다.
③ 수열의 극한의 대소 관계를 이해하게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 고등학교에서는 극한의 개념을 직관적으로 도입하기 때문에 극한의 성질도 엄밀하게 증명하지 않고 구체적인 예를 통하여 직관적으로 이해하게 한다.

2. 극한의 기본 성질은 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴한다는 전제하에 성립함을 유의하게 한다.

3. 수열의 극한에 대한 성질을 적용할 수 있는 형태로 주어진 식을 바꾸는 방법을 많은 예를 통하여 익히도록 지도한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 수렴하는 두 수열의 합, 차, 실수배, 곱, 몫으로 만들어지는 수열의 극한값에 대한 성질을 구체적인 예를 통하여 직관적으로 이해하기 위한 것이다.

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)$
$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)-\left(3+\frac{3}{n}\right)\right\}$
$=\lim_{n\to\infty}\left(-2-\frac{2}{n}\right)=-2$
$\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty} b_n=1-3=-2$

따라서 $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty} b_n}$

2. $\lim_{n\to\infty} 3a_n=\lim_{n\to\infty} 3\left(1+\frac{1}{n}\right)=3\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=3$
$3\lim_{n\to\infty} a_n=3\times1=3$

따라서 $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} 3a_n=3\lim_{n\to\infty} a_n}$

3. $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{3}{n}\right)\right\}$
$=\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{6}{n}+\frac{3}{n^2}\right)=3$
$\lim_{n\to\infty} a_n\lim_{n\to\infty} b_n=1\times3=3$

따라서 $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\lim_{n\to\infty} a_n\lim_{n\to\infty} b_n}$

4. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n+3}=\frac{1}{3}$
$\frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}=\frac{1}{3}$

따라서 $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}}$

교과서 18 쪽

수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha,\ \lim_{n\to\infty} b_n=\beta$$

일 때, 두 수열의 각 항의 합을 항으로 하는 수열 $\{a_n+b_n\}$은 수렴하며, 그 극한값은 두 수열의 극한값의 합과 같다. 즉,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha+\beta$$

이다.

일반적으로 수렴하는 수열의 극한에 대하여 다음과 같은 성질이 성립한다.

❶ **수열의 극한에 대한 기본 성질**

두 수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$이 수렴하고, $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$일 때

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha+\beta$

(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha-\beta$

(3) $\lim_{n\to\infty} ca_n=c\lim_{n\to\infty} a_n=c\alpha$ (단, c는 상수)

(4) $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\lim_{n\to\infty} a_n\cdot\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha\beta$

(5) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ (단, $b_n\neq0$, $\beta\neq0$)

❷ 보기

(1) $\lim_{n\to\infty} 3\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=3\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=3\left(\lim_{n\to\infty} 1+\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\right)=3\cdot(1+0)=3$

(2) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0\cdot0=0$

문제 1 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{5}{n}\right)$　　(2) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n}-1}$

사고력 기르기

추론
▶의사소통
문제 해결

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$일 때, $\lim_{n\to\infty} a_nb_n$의 값을 다음과 같이 계산할 수 있는지 토의하여 보자.

> $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이므로
> $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\lim_{n\to\infty} a_n\cdot\lim_{n\to\infty} b_n=0\cdot\lim_{n\to\infty} b_n=0$이다.

본문 해설

❶ 수열의 극한에 대한 기본 성질은 두 수열 $\lim_{n\to\infty} a_n$, $\lim_{n\to\infty} b_n$이 모두 수렴할 때에만 성립한다.
즉, $\lim_{n\to\infty} a_n$과 $\lim_{n\to\infty} b_n$이 모두 실수인 값을 가질 때에만 성립하는 것이다. 두 수열 중 하나라도 발산하는 경우는 이 성질을 이용할 수 없고 다른 방법으로 계산해야 한다.

❷ 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하여 보기와 같이 계산함을 이해하게 한다.

1

목표 | 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이 | (1) $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{5}{n}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\dfrac{5}{n}$

$=0+0=\mathbf{0}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n}-1}=\dfrac{\lim_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{1}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}-1\right)}=\dfrac{3}{-1}=\mathbf{-3}$

사고력 기르기 의사소통

출제 의도 | 0으로 수렴하는 수열과 다른 수열과의 곱으로 이루어진 수열이 항상 0으로 수렴하는지 알아보고 그렇지 않을 경우 반례를 생각하여 계산할 수 있게 지도한다.

풀이 | 수열 $\{b_n\}$이 반드시 수렴한다고 할 수 없으므로 수열의 극한에 대한 기본 성질이 성립하지 않는다.

예 $a_n=\dfrac{1}{n}$, $b_n=n$이라고 하면 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$

그런데 $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}\cdot n\right)=1$이므로

$\lim_{n\to\infty} a_nb_n\neq\lim_{n\to\infty} a_n\cdot\lim_{n\to\infty} b_n$

지/도/자/료 수열의 극한의 기본 성질

1. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모두 수렴하는 경우가 아니면 극한값의 기본 성질이 성립한다고 말할 수 없다. 예를 들어
$a_n=(-1)^n$, $b_n=(-1)^{n+1}$인 경우
$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=0\neq\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n$
$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=-1\neq\lim_{n\to\infty} a_n\cdot\lim_{n\to\infty} b_n$

2. ∞, $-\infty$는 수가 아니고 기호이지만 ∞, $-\infty$가 포함된 극한값의 계산은 다음과 같이 기억해 두면 편리하다.
(1) $k+\infty=\infty$, $k-\infty=-\infty$, $\dfrac{k}{\infty}=0$, $\dfrac{k}{-\infty}=0$
(2) $k>0$일 때
$k\cdot\infty=\infty$, $k(-\infty)=-\infty$, $\dfrac{\infty}{k}=\infty$, $\dfrac{-\infty}{k}=-\infty$

3. $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)$, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$에 수열의 극한에 대한 기본 성질을 적용했을 때 $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$의 꼴이 되면 이를 부정형(indeterminate form)이라고 한다.

교과서 19 쪽

여러 가지 수열의 극한값을 구할 때, 복잡한 수열은 먼저 간단한 수열의 합, 차, 곱, 몫으로 고치고, 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하여 그 극한값을 구할 수 있다.

❶ 특히 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty,\ \lim_{n\to\infty} b_n=\infty$$

일 때, 수열 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$의 극한값은 분모의 최고차항으로 분모와 분자를 각각 나누어 계산한다.

또 일반항에 무리식이 포함된 수열의 극한값은 유리화하여 계산하면 편리하다.

예제 01 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+1}{n^2+n}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n}-n)$

❷ $\frac{\infty}{\infty}=1$로 계산하지 않도록 유의한다.

$\infty-\infty=0$으로 계산하지 않도록 유의한다.

풀이 (1) 분자, 분모를 각각 n^2으로 나누어 계산하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{0}{1}=0$$

(2) 분자, 분모에 각각 $\sqrt{n^2+n}+n$을 곱해 분자를 유리화하여 계산하면

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

답 (1) 0 (2) $\frac{1}{2}$

문제 2 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n+1}{5n-4}$ (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-n+1}{-3n^2+4}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n-3}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}$ (4) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-n)$

창의 UP

다음 계산에서 ①의 이유를 설명하고, ②를 이용할 때 어떤 조건이 필요한지 말하여라.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{2n^2+3}\xrightarrow[\text{최고차항으로 나눈다.}]{\text{① 분모의}}\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n^2}}\xrightarrow[\text{기본 성질을 이용한다.}]{\text{② 극한에 대한}}\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n^2}\right)}=\frac{1}{2}$$

본문 해설

❶ 기본적으로

$$\lim_{n\to\infty} n=\infty,\ \lim_{n\to\infty} n^2=\infty,\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$$

등을 숙지하고 이용하면 편리하다.

❷ $\frac{\infty}{\infty}$꼴의 극한에서 분모, 분자가 n에 대한 다항식일 때 수열의 극한은

(1) (분자의 차수) > (분모의 차수)이면 ∞ 또는 $-\infty$로 발산한다.

(2) (분자의 차수) = (분모의 차수)이면 최고차항의 계수의 비로 수렴한다.

(3) (분자의 차수) < (분모의 차수)이면 0에 수렴한다.

2

목표| 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n+1}{5n-4}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4+\frac{1}{n}}{5-\frac{4}{n}}$

$=\frac{4}{5}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-n+1}{-3n^2+4}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{-3+\frac{4}{n^2}}$

$=-\frac{2}{3}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n-3}+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{3}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1}}$

$=2$

(4) 분모, 분자에 $\sqrt{n^2+1}+n$을 곱하면

$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$

$=0$

창의 UP

출제 의도| 수열 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$의 극한값을 구할 때 분자, 분모가 ∞로 발산하는 경우 분모의 최고차항으로 나누어 구할 수 있게 지도한다.

풀이| ① 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하려면 수렴하는 수열을 만들어야 한다.

② 두 수열 $\left\{1-\frac{1}{n}\right\}$과 $\left\{2+\frac{3}{n^2}\right\}$이 수렴

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 수렴하는 두 수열의 항끼리의 크기를 비교하고 각각의 극한은 크기가 그대로 유지되는 지를 비교해 봄으로써 대소 관계에 따르는 극한값에 대한 성질을 이해하기 위한 것이다.

1. 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n-a_n=\left(3-\frac{1}{n}\right)-\left(2-\frac{1}{n}\right)$$
$$=-1>0$$

이므로 $\boldsymbol{a_n<b_n}$이다.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)=\mathbf{2},$$

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n}\right)=\mathbf{3}$$

따라서 $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty}a_n<\lim\limits_{n\to\infty}b_n}$이다.

교과서 20 쪽

수열의 극한값의 대소 관계는 어떠한가?

탐구 활동 일반항이 $\boldsymbol{a_n=2-\frac{1}{n}}$, $\boldsymbol{b_n=3-\frac{1}{n}}$인 두 수열 $\{\boldsymbol{a_n}\}$, $\{\boldsymbol{b_n}\}$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. 모든 자연수 n에 대하여 a_n, b_n의 크기를 비교하여 보자.

2. 두 극한값 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$을 각각 구하고, 그 크기를 비교하여 보자.

일반적으로 수렴하는 수열의 극한값의 대소 관계에 대하여 다음과 같은 성질이 성립한다.

❶ **수열의 극한값의 대소 관계**

수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\beta$일 때

(1) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le b_n$이면 $\alpha\le\beta$이다.

(2) 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le c_n\le b_n$을 만족시키고 $\alpha=\beta$이면, 수열 $\{c_n\}$은 수렴하고 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\alpha$이다.

참고 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $a_n<b_n$이라고 해서 반드시 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n<\lim\limits_{n\to\infty}b_n$이 성립하는 것은 아니다. 예를 들어 $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=\frac{2}{n}$이면 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<b_n$이지만 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$이다.

예제 02 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음을 만족시킬 때, $\lim\limits_{n\to\infty}na_n$의 값을 구하여라.

$$\frac{1}{n+2}\le a_n\le\frac{1}{n+1}$$

풀이 각 변에 n을 곱하면 $\frac{n}{n+2}\le na_n\le\frac{n}{n+1}$

그런데 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$이므로 $1\le\lim\limits_{n\to\infty}na_n\le1$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=1$

답 1

문제 3 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $3n^2-2\le(n^2-2n)a_n\le3n^2+2n-1$을 만족시킬 때, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하여라.

본문 해설

❶ 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\beta$일 때

(1) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<b_n$이지만 $\alpha=\beta$인 경우가 있다.

(2) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<c_n<b_n$이어도 $\alpha=\beta$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\alpha$가 성립한다.

또, 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$이 수렴하고 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<b_n<c_n$일 때 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=c_n$인 경우도 있다.

3

목표 | 수열의 극한의 대소 관계를 이용하여 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이 | $3n^2-2\le(n^2-2n)a_n\le3n^2+2n-1$의 각 변을 n^2-2n으로 나누면

$$\frac{3n^2-2}{n^2-2n}\le a_n\le\frac{3n^2+2n-1}{n^2-2n}$$

그런데 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-2}{n^2-2n}=3$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n-1}{n^2-2n}=3$이므로

$3\le\lim\limits_{n\to\infty}a_n\le3$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\mathbf{3}$

지/도/자/료

수열의 극한에 대한 대소 관계에서

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\alpha$일 때 모든 자연수 n에 대하여

$a_n\le b_n\le c_n$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\alpha$

이 정리는 샌드위치 정리(sandwich theorem)정리로 많이 알려져 있다.

교과서 21 쪽

03 등비수열의 극한값

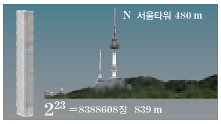
● 등비수열의 극한값을 구할 수 있다.

등비수열의 극한값은 어떻게 구하는가?

생각 열기 종이접기에 숨어 있는 $\frac{1}{2}$과 2의 위력

종이를 반으로 계속 접어 간다면 몇 번이나 접을 수 있을까? 종이를 반으로 계속 접으면 접힌 종이의 한 면의 넓이는 $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots$ 배로 줄어들고, 겹쳐진 종이의 수는 $2, 2^2, 2^3, \cdots$배로 늘어난다.

그런데 종이의 두께나 길이를 생각하면 종이접기가 그렇게 쉬운 것은 아니다. 종이를 계속 반으로 접으면 접혀지는 모서리 부분이 차지하는 넓이가 의외로 넓어져서 실제로 7번을 접기도 어렵다고 한다. 만약 두께가 0.1 mm인 종이를 계속 접을 수 있다고 하면 그 높이는 얼마나 될까?



탐구 활동 등비수열 $\{r^n\}$에서 공비 r가 다음과 같을 때, 수렴, 발산을 조사하여 보자.

1. $r=\frac{1}{2}$ **2.** $r=2$

❶ 탐구 활동에서 $r=\frac{1}{2}$일 때, 등비수열 $\{r^n\}$은

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots$$

이므로 0에 수렴한다. 또 $r=2$일 때, 등비수열 $\{r^n\}$은

$$2, 4, 8, 16, \cdots, 2^n, \cdots$$

이므로 무한대로 발산한다.

위와 같이 등비수열 $\{r^n\}$은 공비 r의 값에 따라 수렴과 발산이 정해짐을 알 수 있다.

생각 열기 참/고/자/료

종이를 반으로 몇 번이나 접을 수 있을까? 일반인은 기껏해야 6번 또는 7번까지 접을 수 있다고 한다.

외국에서는 이 종이 반접기가 꾸준한 토론거리가 될 만큼 관심을 끌었다고 하는데 미국의 한 여학생이 이 문제를 수학적으로 풀어내 주목을 받았다고 한다.

브리트니 걸리반(Britney Gallivan)이라는 이 여성은 여고시절 종이 반접기 등식을 고안했을 뿐 아니라 종이를 무려 12번이나 접어 보여 주위를 깜짝 놀라게 했다.

2001년 12월에는 종이를 한쪽 방향으로 접을 때의 공식을 고안했고 이듬해 1월에는 종이를 번갈아 접을 때의 공식을 만들었다고 한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 종이접기에 대한 이 활동은 공비의 변화에 따라 r^n의 수렴과 발산이 정해짐을 직관적으로 이해하기 위한 것이다.

03 등비수열의 극한값

소단원 지도 목표

① 등비수열의 뜻을 알게 한다.

② 등비수열 $\{r^n\}$의 수렴 조건과 발산 조건을 이해하게 한다.

③ 등비수열의 극한값을 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 등비수열은 공비의 범위에 따라 수열의 수렴과 발산이 정해짐을 이해하게 한다.

2. 등비수열이 수렴하는 공비의 범위를 올바르게 이해하도록 지도한다.

3. r^n의 극한은 r의 범위에 따라 수렴하는 경우도 있고 발산하는 경우도 있으므로 r^n을 포함한 식의 극한값은 r의 범위를 나누어서 구할 수 있도록 지도한다.

1. $r=\frac{1}{2}$일 때 수열 $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$은

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$$

이므로 수렴한다.

2. $r=2$일 때 수열 $\{2^n\}$은

$$\lim_{n\to\infty}2^n=\infty$$

이므로 (양의 무한대로) 발산한다.

본문 해설

❶ 각 항이 0이 아닌 등비수열 $a, ar, ar^2, \cdots, ar^{n-1}, \cdots$의 수렴, 발산은 $a=1$인 경우만 생각해 보아도 쉽게 알 수 있다.

즉, $1, r, r^2, \cdots, r^{n-1}, \cdots$에서 r의 값에 따른 수렴, 발산을 생각한다.

교과서 22 쪽

이제 등비수열 $\{r^n\}$, 즉

$$r,\ r^2,\ r^3,\ \cdots,\ r^n,\ \cdots$$

의 수렴, 발산을 공비 r의 값에 따라 알아보자.

❶ 수학 Ⅱ 수학적 귀납법을 이용하여 $(1+h)^n>1+nh\ (h>0,\ n\ge2)$임을 보일 수 있다.

❷ (i) $r>1$일 때

$r=1+h\ (h>0)$라고 하면 $r^n=(1+h)^n>1+nh\ \ (n\ge2)$이고,

$\lim_{n\to\infty}(1+nh)=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}r^n=\infty$$

(ii) $r=1$일 때

모든 자연수 n에 대하여 $r^n=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}r^n=\lim_{n\to\infty}1=1$$

(iii) $-1<r<1$일 때

① $r=0$이면 모든 자연수 n에 대하여 $r^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}r^n=\lim_{n\to\infty}0=0$$

② $r\ne0$이면 $\frac{1}{|r|}>1$이므로 (i)에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|r^n|}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{|r|}\right)^n=\infty$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}|r^n|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{|r^n|}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{|r|}\right)^n}=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}r^n=0$이다.

(iv) $r\le-1$일 때

① $r=-1$이면 수열 $\{r^n\}$은 $-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$이므로 진동한다.

② $r<-1$이면 $|r|>1$이므로 (i)에 의하여 $\lim_{n\to\infty}|r^n|=\lim_{n\to\infty}|r|^n=\infty$이고 r^n의 부호가 교대로 변하므로 수열 $\{r^n\}$은 진동한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

❸ **등비수열 $\{r^n\}$의 수렴, 발산**

(1) $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=\infty$ (발산)

(2) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=1$ (수렴)

(3) $-1<r<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=0$ (수렴)

(4) $r\le-1$일 때, 수열 $\{r^n\}$은 진동한다. (발산)

● 등비수열 $\{r^n\}$은 $-1<r\le1$일 때, 수렴한다.

본문 해설

❶ 부등식 $(1+h)^n\ge1+nh\ (h>0)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여 보자.

$(1+h)^n\ge1+nh\ (h>0)$ ······ ㉠

(i) $n=1$일 때

(좌변)$=1+h$, (우변)$=1+h$

즉 $n=1$일 때 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면

$(1+h)^k\ge1+kh$ ······ ㉡

㉡의 양변에 $1+h$를 곱하면

$(1+h)^{k+1}\ge(1+kh)(1+h)$

그런데

$(1+kh)(1+h)=1+(k+1)h+kh^2$

이고 $kh^2>0$이므로

$(1+kh)(1+h)>1+(k+1)h$

$(1+h)^{k+1}\ge1+(k+1)h$

즉, $n=k+1$일 때도 ㉠이 성립한다.

따라서 (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

❷ $r>1$일 때 다음과 같이 증명할 수도 있다.

$$1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}=\frac{r^n-1}{r-1}$$

$r>1$일 때 이 식의 좌변의 값은 n보다 크다. 따라서

$$\frac{r^n-1}{r-1}>n$$

$r-1>0$이므로 $r^n>n(r-1)+1$

$n\to\infty$일 때 $n(r-1)+1\to\infty$이므로

$\lim_{n\to\infty}\{n(r-1)+1\}=\infty$

따라서 $\lim_{n\to\infty}r^n=\infty$

❸ 등비수열 $\{r^n\}$의 수렴 조건은 $-1<r\le1$이다.

함수 $y=r^n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$의 그래프에서 y의 값의 변화를 관찰함으로써 등비수열 $\{r^n\}$의 수렴 여부를 직관적으로 확인할 수 있다.

지/도/자/료

$0<r<1$일 때 $\lim_{n\to\infty}r^n=0$임을 다음과 같이 유계인 단조감소수열의 성질을 이용하여 설명할 수 있다. 그러나 고등학교 교육과정을 벗어나므로 지도하지 않고, 직관적으로 이해할 수 있도록 한다.

$r^{n+1}=r\cdot r^n \Rightarrow r^{n+1}<r^n$

즉, $0<r^{n+1}<r^n<\cdots<r<1$이므로 $\{r^n\}$은 각 항이 0과 1 사이에 있고 유계인 단조감소수열이다.

이때, 극한값을 M이라고 하면

$\lim_{n\to\infty}r^n=M$이고 $\lim_{n\to\infty}r^{n+1}=M$

그런데 $\lim_{n\to\infty}r\cdot r^n=r\lim_{n\to\infty}r^n=rM$이므로

$rM=M$에서 $r\ne1$이므로

$M=0$, 즉 $\lim_{n\to\infty}r^n=0$

교과서 23 쪽

보기 (1) 등비수열 $\{r^n\}$이 $-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \cdots, \left(-\frac{1}{3}\right)^n, \cdots$일 때,

$r=-\frac{1}{3}$이고, $-1<r<1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=0$이다.

(2) 등비수열 $\{r^n\}$이 $-3, 9, -27, \cdots, (-3)^n, \cdots$일 때,

$r=-3$이고, $r\le -1$이므로 $\lim_{n\to\infty}(-3)^n$은 발산(진동)한다.

문제 1 다음 수열의 수렴, 발산을 조사하여라.

(1) $\{1.05^n\}$ (2) $\{(-0.8)^n\}$

(3) $\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$ (4) $\left\{\left(-\frac{5}{4}\right)^n\right\}$

예제 01 다음 수열의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하여라.

(1) $\left\{\frac{3^n-4^n}{5^n+2^n}\right\}$ (2) $\left\{\frac{5^n+2^n}{3^n-2^n}\right\}$

분모에서 밑의 절댓값이 가장 큰 항으로 분모와 분자를 나눈다.

풀이 (1) 분모와 분자의 모든 항을 5^n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-4^n}{5^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n-\left(\frac{4}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{5}\right)^n}=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n}{1+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n}$$

$$=\frac{0-0}{1+0}=0$$

따라서 주어진 수열은 수렴하고, 그 극한값은 0이다.

(2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n+2^n}{3^n-2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{5}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

그런데 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$이므로 주어진 수열은 양의 무한대로 발산한다.

답 (1) 수렴, 0 (2) 발산

문제 2 다음 수열의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 극한값을 구하여라.

(1) $\left\{\frac{3^n}{5^n+1}\right\}$ (2) $\left\{\frac{5^n+2^n}{3^n}\right\}$

(3) $\left\{\frac{5\cdot 3^n+2^n}{3^n-2^n}\right\}$ (4) $\left\{\frac{3^{n+1}+2^n}{3^n+3^{n-1}}\right\}$

1

목표| 공비의 값의 크기에 따라 등비수열이 수렴 또는 발산하는지 판정할 수 있게 한다.

풀이| (1) 첫째항이 1.05, 공비가 $r=1.05$인 등비수열이고 $r>1$이므로 **발산한다.**

(2) 첫째항이 -0.8, 공비가 $r=-0.8$인 등비수열이고 $-1<r<1$이므로 **수렴한다.**

(3) 첫째항이 $\frac{2}{3}$, 공비가 $r=\frac{2}{3}$인 등비수열이고 $-1<r<1$이므로 **수렴한다.**

(4) 첫째항이 $-\frac{5}{4}$, 공비가 $r=-\frac{5}{4}$인 등비수열이고 $r\le -1$이므로 진동 즉, **발산한다.**

2

목표| 등비수열의 수렴, 발산을 조사하고 수렴하면 그 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 분모와 분자의 모든 항을 5^n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{5^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{5}\right)^n}$$

$$=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n}{1+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n}=\frac{0}{1+0}=0$$

따라서 주어진 수열은 **수렴**하고 극한값은 **0**이다.

(2) 분모와 분자의 모든 항을 3^n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n+2^n}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{5}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1}$$

$$=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^n+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1}=\infty$$

따라서 주어진 수열은 **발산한다.**

(3) 분모와 분자의 모든 항을 3^n으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot 3^n+2^n}{3^n-2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n}=5$$

따라서 주어진 수열은 **수렴**하고 극한값은 **5**이다.

(4) 분모와 분자의 모든 항을 3^{n-1}으로 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+2^n}{3^n+3^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+2^n}{3^{n-1}(3+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3^2+2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{(3+1)}$$

$$=\frac{3^2+2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{4}=\frac{9}{4}$$

따라서 주어진 수열은 **수렴**하고 극한값은 $\mathbf{\frac{9}{4}}$이다.

교과서 24 쪽

예제 02 $r>0$일 때, 수열 $\left\{\dfrac{1-r^n}{1+r^n}\right\}$의 수렴, 발산을 조사하여라.

풀이 (i) $0<r<1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty} r^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

(ii) $r=1$일 때, 모든 자연수 n에 대하여 $r^n=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\frac{1-1}{1+1}=0$$

(iii) $r>1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty} r^n=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{r^n}-1}{\dfrac{1}{r^n}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

답 $0<r<1$일 때 1에 수렴, $r=1$일 때 0에 수렴, $r>1$일 때 -1에 수렴

문제 3 수열 $\left\{\dfrac{r^{2n}+r}{1+r^{2n}}\right\}$의 수렴, 발산을 조사하여라.

사고력 기르기

추론
의사소통
▶문제 해결

두 양수 a, b에 대하여 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a^n+b^n}$의 값을 구하여 보자.

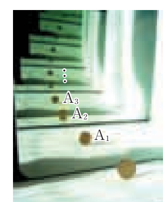
단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

두 평면 거울에 비친 동전을 차례로 A_1, A_2, $\cdots$, A_n, $\cdots$이라고 할 때, 동전의 반지름의 길이는 차례로 $\dfrac{9}{10}$배로 줄어든다고 한다. 동전의 반지름의 길이가 1이라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 동전 A_n의 넓이 a_n을 구하여라.

(2) n이 한없이 커질 때, 동전의 넓이를 구하여라.



3

목표| 분모, 분자에 n에 대한 지수함수를 포함한 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값을 밑 r에 따라 구할 수 있게 한다.

풀이| 수열 $\left\{\dfrac{r^{2n}+r}{1+r^{2n}}\right\}$에 대하여

(i) **$|r|>1$일 때**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{2n}+r}{1+r^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\dfrac{1}{r}\right)^{2n-1}}{\left(\dfrac{1}{r}\right)^{2n}+1}$$

$$=\frac{1+0}{0+1}=1$$

따라서 1에 수렴한다.

(ii) **$|r|<1$일 때** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^{2n}+r}{1+r^{2n}}=\dfrac{0+r}{1+0}=r$

따라서 r에 수렴한다.

(iii) **$r=1$일 때** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^{2n}+r}{1+r^{2n}}=\dfrac{1+1}{1+1}=1$

따라서 1에 수렴한다.

(iv) **$r=-1$일 때** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^{2n}+r}{1+r^{2n}}=\dfrac{1-1}{1+1}=0$

따라서 0에 수렴한다.

사고력 기르기 문제 해결

출제 의도| 실제 예를 들어 극한과 관련된 특정한 조건을 만족하는 수열을 구할 수 있는지 알아보고 극한의 성질을 확실히 인지할 수 있도록 지도한다.

풀이| 두 양수 a, b에 대하여

(i) **$a>b$일 때**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a^n+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a-\left(\dfrac{b}{a}\right)^n\cdot b}{1+\left(\dfrac{b}{a}\right)^n}=\boldsymbol{a}$$

(ii) **$a=b$일 때**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a^n+b^n}=\lim_{n\to\infty}0=\mathbf{0}$$

(iii) **$a<b$일 때**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a^n+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{a}{b}\right)^n\cdot a-b}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^n+1}=\frac{0\cdot a-b}{0+1}=\boldsymbol{-b}$$

단원 과제

목표| 거울에 반사된 동전의 반지름의 길이의 변화를 통하여 등비수열의 뜻을 알고 등비수열의 극한값을 예측해 볼 수 있게 한다.

풀이| (1) 동전 A_n의 반지름의 길이를 r_n이라고 하면

$$r_n=1\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^n,\ a_n=\pi r_n{}^2=\boldsymbol{\pi\left(\frac{81}{100}\right)^n}$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\pi\cdot\left(\dfrac{81}{100}\right)^n=0$이므로 **$n$이 한없이 커지면 동전의 넓이는 0에 가까워진다.**

중/단/원 기초

1

목표| 수열의 수렴, 발산을 조사할 수 있게 한다.

풀이| (1) 0에 한없이 가까워지므로 **수렴한다.**

(2) 양의 방향으로 한없이 커지므로 **발산한다.**

교과서 25 쪽

중단원 기초

[해답 p.191]

수준별 학습

1 다음 수열의 수렴, 발산을 조사하여라. — 01 수열의 수렴과 발산

(1) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \cdots$　　(2) $-1, 2, 5, 8, \cdots$

(3) $1, -2, 4, -8, \cdots$　　(4) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots$

2 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=2$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=3$일 때, 다음 극한값을 구하여라. — 02 극한값의 계산 (수열의 극한에 대한 기본 성질)

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(2a_n-5)$　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(3a_n-4b_n)$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}4a_nb_n$　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3a_n}{4b_n}$

3 다음 극한을 조사하고, 극한이 존재하면 그 극한값을 구하여라. — 02 극한값의 계산

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n-1}{2n^2+5}$　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{n^2+1}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3n}-n}$

4 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $\frac{2n^2-n}{n^2+3}\le a_n\le\frac{2n^2}{n^2+2}$을 만족시킬 때, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하여라. — 02 극한값의 계산 (수열의 극한값의 대소 관계)

5 다음 수열의 수렴, 발산을 조사하여라. — 03 등비수열의 극한값

(1) $\{(-1.32)^n\}$　　(2) $\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$

(3) $\left\{\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^n\right\}$　　(4) $\left\{\frac{5^n}{3^{2n}}\right\}$

(3) 양수와 음수가 교대로 나타나면서 그 절댓값이 커지며 진동하므로 **발산한다.**

(4) 0에 한없이 가까워지므로 **수렴한다.**

2

목표| 수열의 극한의 기본 성질을 이용할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\lim\limits_{n\to\infty}(2a_n-5)=2\lim\limits_{n\to\infty}a_n-5=\mathbf{-1}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(3a_n-4b_n)=3\lim\limits_{n\to\infty}a_n-4\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\mathbf{-6}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(4a_nb_n)=4\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\mathbf{24}$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3a_n}{4b_n}=\frac{3\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{4\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\mathbf{\frac{1}{2}}$

3

목표| 수열의 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n-1}{2n^2+5}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{2+\frac{1}{n^2}}=\frac{3}{2}$

따라서 **수렴하고 극한값은 $\frac{3}{2}$이다.**

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3-1}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=\infty$

따라서 **발산한다.**

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$

따라서 **수렴하고 극한값은 0이다.**

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3n}-n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}+n}{n^2+3n-n^2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1}{3}$

$=\frac{2}{3}$

따라서 **수렴하고 극한값은 $\frac{2}{3}$이다.**

4

목표| 수열의 극한값의 대소 관계를 이용하여 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이| 부등식 $\frac{2n^2-n}{n^2+3}\le a_n\le\frac{2n^2}{n^2+2}$에서

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-n}{n^2+3}=2$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+2}=2$이므로 $\mathbf{\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2}$

5

목표| 등비수열의 수렴, 발산을 조사할 수 있게 한다.

풀이| (1) 공비 $-1.32\le-1$이므로 진동한다. 즉, **발산한다.**

(2) 공비 $-1<\frac{2}{3}<1$이므로 **수렴한다.**

(3) 공비 $\frac{3}{\sqrt{5}}>1$이므로 **발산한다.**

(4) 공비 $\frac{5^n}{3^{2n}}=\frac{5^n}{9^n}=\left(\frac{5}{9}\right)^n$에서 $\frac{5}{9}<1$이므로 **수렴한다.**

중/단/원 기본

1

목표| 수열의 수렴, 발산을 조사할 수 있게 한다.

풀이| n이 한없이 커질 때

㉠ 수열이 한없이 0에 가까워지므로 수렴한다.

㉡ 수열이 절댓값이 커지면서 진동하므로 발산한다.

㉢ 수열은 항상 0이므로 수렴한다.

㉣ 수열은 1, -1, 1, -1, $\cdots$로 1과 -1이 교대로 나타나므로 발산한다.

따라서 수렴하는 것은 ㉠, ㉢이다.

2

목표| 주어진 수열의 조건과 극한에 대한 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\lim\limits_{n\to\infty} na_n=\dfrac{1}{2}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{n^2a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{na_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{n}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}na_n}$$

$$=3\cdot2=\mathbf{6}$$

교과서 26 쪽

중단원 기본

[해답 p.191]

수준별 학습

1 다음 수열 중에서 수렴하는 것을 모두 찾아라. — 01 수열의 수렴과 발산

㉠ $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n+1}\right\}$	㉡ $\{(-1)^{n-1}n\}$
㉢ $\{(-1)^n+(-1)^{n-1}\}$	㉣ $\{2+(-1)^n\}$

2 수열 $\{a_n\}$이 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n=\dfrac{1}{2}$을 만족시킬 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-2}{n^2a_n}$의 값을 구하여라. — 02 극한값의 계산: 수열의 극한에 대한 기본 성질

3 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{an^2+bn-4}{2n+3}=4$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라. — 02 극한값의 계산: 미정계수의 결정

4 수렴하는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{n+1}+3^na_n}{3^{n+1}-5^na_n}=5$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하여라. — 03 등비수열의 극한값

5 함수 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}+2x+3}{x^{2n}+1}$에 대하여 $f(-2)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f(1)$의 값을 구하여라. — 03 등비수열의 극한값: 등비수열의 수렴 조건

3

목표| 부정형의 극한값을 이용하여 미정계수를 결정할 수 있게 한다.

풀이| $$\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn-4}{2n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{an+b-\dfrac{4}{n^2}}{2+\dfrac{3}{n}}=4$$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}2+\dfrac{3}{n}=2$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{an+b-\dfrac{4}{n^2}\right\}=8$이다.

따라서 $a=0$, $b=8$이므로 $a+b=0+8=\mathbf{8}$

4

목표| 주어진 조건을 이용하여 원래 수열 $\{a_n\}$의 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이| 수열 $\{a_n\}$이 수렴하고 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5^{n+1}+3^na_n}{3^{n+1}-5^na_n}=5$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}+3^na_n}{3^{n+1}-5^na_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\left(\dfrac{3}{5}\right)^na_n}{3\left(\dfrac{3}{5}\right)^n-a_n}=\frac{5}{-\lim\limits_{n\to\infty}a_n}$$

$\dfrac{5}{-\lim\limits_{n\to\infty}a_n}=5$에서 $-5\lim\limits_{n\to\infty}a_n=5$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\mathbf{-1}$

5

목표| 등비수열의 수렴 조건을 알고 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| (i) $|x|>1$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+2x+3}{x^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{x+\dfrac{2}{x^{2n-1}}+\dfrac{3}{x^{2n}}}{1+\dfrac{1}{x^{2n}}}=x$$

(ii) $x=1$일 때 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}+2x+3}{x^{2n}+1}=3$

(iii) $|x|<1$일 때 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}+2x+3}{x^{2n}+1}=2x+3$

따라서

$$f(-2)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)=-2+2\left(\frac{1}{2}\right)+3+3=\mathbf{5}$$

교과서 27 쪽

중단원 실력

[해답 p.191]

수준별 학습

1 수열의 극한에 대한 다음 설명 중에서 옳은 것을 모두 찾아라.

01 수열의 수렴과 발산

ㄱ. 임의의 수열 $\{a_n\}$은 n이 한없이 커지면 수렴하거나 발산한다.
ㄴ. 진동하는 수열 중에서 수렴하는 수열도 존재한다.
ㄷ. 수열 $\{a_n\}$이 수렴하면 두 수열 $\{a_{2n-1}\}$, $\{a_{2n}\}$도 수렴한다.
ㄹ. 수열 $\{a_n\}$이 수렴하면 수열 $\{a_{n+1}\}$은 수렴하지 않는다.

2 자연수 n에 대하여 $\sqrt{n^2+6n+3}$의 소수 부분을 a_n이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty} 50a_n$의 값을 구하여라.

02 극한값의 계산

3 다음의 수열 $\{a_n\}$에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}$의 값이 존재하는 것을 모두 찾아라.

02 극한값의 계산
수열의 극한에 대한 기본 성질

㉠ $a_n=n$ ㉡ $a_n=\frac{1}{2^n}$ ㉢ $a_n=(-1)^n$

4 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=3n+2^n$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2^n}$의 값을 구하여라.

03 등비수열의 극한값

5 자연수 n에 대하여 10^n의 약수의 총합을 a_n이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{10^n}$의 값을 구하여라.

03 등비수열의 극한값
특별한 언급이 없는 한 일반적으로 '약수'는 양의 약수를 의미한다.

중/단/원 실력

1

목표| 수열의 극한에 대한 개념을 정리할 수 있게 한다.

풀이| ㄴ. 진동하는 수열은 모두 발산한다.
ㄹ. 수열 $\{a_n\}$이 수렴하면 수열 $\{a_{n+1}\}$도 수렴한다.
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

2

목표| a_n을 구하고 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\sqrt{n^2+4n+4}<\sqrt{n^2+6n+3}<\sqrt{n^2+6n+9}$에서
$\sqrt{n^2+6n+3}$의 소수 부분은 $\sqrt{n^2+6n+3}-(n+2)$

$$\lim_{n\to\infty}50a_n=50\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{n^2+6n+3}-(n+2)\}$$
$$=50\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+6n+3-(n+2)^2}{\sqrt{n^2+6n+3}+(n+2)}$$
$$=50\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{\sqrt{n^2+6n+3}+(n+2)}=\mathbf{50}$$

3

목표| 주어진 수열의 합과 극한에 대한 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이| ㉠ $a_1+a_2+\cdots+a_n=1+2+\cdots+n$
$$=\frac{n(n+1)}{2}$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n}$$
$$=\infty$$
㉡ $a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n$
$$=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}$$
$$=0$$
㉢ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$

따라서 극한값이 존재하는 것은 ㉡, ㉢이다.

4

목표| 주어진 부분합을 이용하여 일반항을 구하고 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $S_n=3n+2^n$이므로 $n=2, 3, 4, \cdots$일 때
$$a_n=S_n-S_{n-1}=3n+2^n-3(n-1)-2^{n-1}$$
$$=3n+2\cdot2^{n-1}-3n+3-2^{n-1}$$
$$=2^{n-1}+3$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}+3}{2^n}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

5

목표| 주어진 수열의 조건이 등비수열임을 알고 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $10^n=(2\times5)^n$이므로 10^n의 약수의 총합은
$$a_n=(1+2+2^2+\cdots+2^n)(1+5+5^2+\cdots+5^n)$$
$$=\frac{2^{n+1}-1}{2-1}\times\frac{5^{n+1}-1}{5-1}$$
$$=\frac{1}{4}(10^{n+1}-2^{n+1}-5^{n+1}+1)$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{10^n}=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{10^{n+1}-2^{n+1}-5^{n+1}+1}{10^n}$$
$$=\frac{1}{4}\cdot10=\mathbf{\frac{5}{2}}$$

2 급수

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있게 한다.

② 등비급수의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있게 한다.

③ 등비급수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
01 급수의 수렴과 발산	급수의 수렴과 발산
	급수와 일반항
02 등비급수	등비급수의 수렴과 발산
	급수의 성질
03 등비급수의 활용	등비급수의 활용

교과서 28 쪽

2 급수

식물원의 유리 벽은 지구의 대기와 같다.

지구에 대기가 존재하지 않으면 태양에서 받는 빛에너지를 그대로 다시 방출하게 된다. 이러한 원리로 지구 표면의 온도를 계산하면 약 $-26\ ^\circ\mathrm{C}$ 정도까지 떨어지게 된다. 그러나 지구에는 대기가 존재하여 평균 기온은 약 $14\ ^\circ\mathrm{C}$ 정도를 유지하고 있다.

식물원의 천장과 벽은 보통 유리로 이루어져 있는데, 유리가 지구의 대기와 같은 역할을 함으로써 식물원 내부의 식물이 생장하기 좋은 온도를 유지시켜 준다. 최근에는 유리의 구조를 여러 가지 방법으로 개선하여 실내에 유입되는 빛의 양과 방출되는 빛의 양을 조절하여 보다 안정적인 온도를 유지할 수 있다고 한다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 36쪽

유리를 통과하여 식물원의 내부로 들어오는 햇빛의 양을 구할 수 있을까?

들어가면서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면 수열 $\{a_n\}$과 마찬가지로 또 다른 수열이 된다. 따라서 n이 무한히 커질 때 수열 $\{S_n\}$은 수렴하거나 발산하게 된다. 즉, 급수는 수열의 극한에 대한 성질을 적용하여 수렴과 발산을 판정할 수 있다.
이 단원에서는 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고 부분합의 극한을 이용하여 그 합을 구하는 방법과 급수의 기본 성질을 지도한다. 즉, 급수의 합을 구하고 활용할 수 있게 하는 것이 이 단원의 목표이다.

성취 기준과 성취 수준

성취 기준		성취 수준
1. 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.	상	수열의 수렴, 발산을 판별할 수 있다.
	중	급수의 수렴, 발산의 조건 '급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이다. $\lim_{n\to\infty} a_n\neq0$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.'를 말할 수 있다.
	하	급수의 수렴, 발산의 뜻을 말할 수 있다.
2. 등비급수의 뜻을 알고 그 합을 구할 수 있다.	상	등비급수의 합을 구할 수 있다.
	중	등비급수의 수렴 조건을 말할 수 있다.
	하	등비급수의 뜻을 말할 수 있다.
3. 등비급수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.	상	등비급수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.
	중	등비급수를 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있다.
	하	$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n-\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 을 이용하여 수렴하는 급수의 합과 차를 구할 수 있다.

교과서 29 쪽

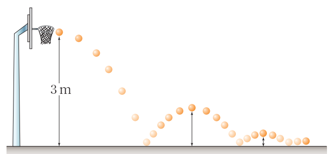
01 급수의 수렴과 발산

● 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고, 이를 판별할 수 있다.

급수의 수렴과 발산은 무엇인가?

생각 열기

탐구 활동 다음 그림과 같이 땅에 떨어지면 떨어진 높이의 $\frac{1}{4}$배만큼 다시 튀어 오르는 농구공이 있다고 하자. 이 공이 지상 $3\,\mathrm{m}$ 높이의 골대에 맞고 땅에 떨어졌을 때, 물음에 답하여 보자.



1. 땅에 떨어진 후 n번째 튀어 오른 공의 높이를 a_n이라고 할 때, a_n의 값을 구하여 보자.

2. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$의 값을 구하여 보자.

3. **2**의 결과를 이용하여 공이 튀어 오른 높이의 총합을 구하는 방법을 말하여 보자.

위와 같이 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

이라고 하면 수열 $\{a_n\}$의 모든 항의 합

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

은 n이 한없이 커질 때 S_n의 극한으로 생각할 수 있다.

01 급수의 수렴과 발산

소단원 지도 목표

① 급수, 급수의 제n항까지의 부분합, 급수의 합의 뜻을 알게 한다.

② 급수의 수렴, 발산의 뜻을 알고 수렴, 발산을 조사할 수 있게 한다.

③ 수렴하는 급수와 일반항 사이의 관계를 이해하고 급수의 합을 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 급수에서는 교환법칙과 결합법칙이 성립하지 않음을 설명하도록 한다.

2. 급수의 합은 부분합으로 이루어지는 수열의 극한임을 알도록 한다.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$은 급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하기 위한 충분조건이 아니라 필요조건임을 이해하도록 지도한다.

새로 나온 용어와 기호

- 급수(級數, series)
- 부분합(部分合, partial sum)
- 급수의 합(級數- 合, sum of series)
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 농구 골대에서 튀어 나와 n번째 튀어 오른 공의 높이를 n에 대한 식으로 나타내고 첫째항부터 제 n항까지의 합을 구해 보도록 한다.

1. $a_1=3\times\frac{1}{4},\ a_2=3\left(\frac{1}{4}\right)^2,\ a_3=3\left(\frac{1}{4}\right)^3,\ \cdots$

이므로

$$a_n=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\mathbf{3\left(\frac{1}{4}\right)^{n}}$$

2. $S_n=\dfrac{\frac{3}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{4}}=\mathbf{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n}}$

3. 공이 튀어 오른 높이의 총합은 n이 한없이 커질 때 S_n의 극한으로 생각할 수 있으므로 $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} S_n}$의 값을 구한다.

참고| 공이 튀어 오른 높이의 총합은

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}=1$이다.

지/도/자/료

- $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots$을 구하여 공이 n번째 튀어 오른 높이 a_n을 추측할 수 있게 한다.
- 등비수열의 합을 이용하여 공이 튀어 오른 높이의 합 S_n을 구하여 보게 한다.
- 여기서 구한 공이 튀어 오른 높이의 합과 공이 실제 움직인 거리의 합은 다르므로 공이 움직인 거리의 합도 같이 구해 보도록 지도한다.

교과서 30 쪽

수열의 합의 수렴과 발산에 대하여 알아보자.

수열 $\{a_n\}$의 각 항을 차례로 덧셈 기호 $+$로 연결한 식

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

을 **급수**라 하고, 기호 $\sum$를 사용하여

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

과 같이 나타낸다.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$에서 첫째항부터 제n항까지의 합

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$$

를 급수의 제n항까지의 **부분합**이라고 한다.

$n=1, 2, 3, \cdots, n$일 때
$S_1=a_1$
$S_2=a_1+a_2$
$\vdots$
$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

❶ 이 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$이 일정한 값 S에 수렴할 때, 즉

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k=S$$

이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 S에 수렴한다고 한다.

❷ 이때 S를 이 **급수의 합**이라 하고, 기호로

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots=S \quad \text{또는} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n=S$$

와 같이 나타낸다.

한편 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$이 발산하면 이 급수는 발산한다고 한다.

먼저 제n항까지의 부분합 S_n을 구하여 극한값 $\lim_{n\to\infty} S_n$을 구한다.

❸ **보기** (1) 급수 $1+2+3+\cdots+n+\cdots$의 제n항까지의 부분합을 S_n이라고 하면

$S_n=\frac{n(n+1)}{2}$이므로 $\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2}=\infty$

따라서 이 급수는 양의 무한대로 발산한다.

(2) 급수 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\cdots$의 제$n$항까지의 부분합을 S_n이라고 하면

$S_n=2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$이므로 $\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} 2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=2$

따라서 이 급수는 2에 수렴한다.

문제 1 다음 급수의 수렴, 발산을 조사하여라.

(1) $2+4+6+\cdots+2n+\cdots$ (2) $3+1+\frac{1}{3}+\cdots+3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\cdots$

본문 해설

❶ 급수는 부분합으로 이루어진 수열 S_1, S_2, S_3, $\cdots$, S_n, $\cdots$의 극한으로 정의한다.
따라서
$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}=1-1+1-1+1-\cdots$
의 부분합 S_n은 n이 홀수이면 1, n이 짝수이면 0이므로 부분합의 수열 $\{S_n\}$은
1, 0, 1, 0, 1, $\cdots$이 되어 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$은 발산한다.
그러나
$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$,
$1+(-1+1)+(-1+1)+\cdots$
는 각각 0과 1에 수렴한다.
그런데 이렇게 얻은 0과 1은 부분합 S_1, S_2, S_3, $\cdots$, S_n, $\cdots$의 극한이 아니므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$의 합이라고 할 수 없다.
이와 같이 부분합을 구할 때 임의로 괄호로 결합하여 계산해서는 안 된다는 것에 주의한다.

❷ 급수의 수렴과 발산은 수열 $\{a_n\}$의 부분합
$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$
의 극한값의 존재 여부에 따라 결정된다.
즉, $\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

❸ 보기에서는 제n항까지의 부분합을 구하고 부분합을 이용하여 급수의 수렴, 발산을 알 수 있음을 확인하도록 한다.

1

목표 | 급수의 수렴, 발산을 조사할 수 있게 한다.

풀이 | (1) 급수 $2+4+6+\cdots+2n+\cdots$의 제n항까지의 부분합을 S_n이라고 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} 2k=2\sum_{k=1}^{n} k$$
$$=2\times\frac{n(n+1)}{2}=n^2+n$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}(n^2+n)=\infty$$

따라서 이 급수는 양의 무한대로 발산한다.

(2) 급수 $3+1+\frac{1}{3}+\cdots+3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\cdots$의 제 n항까지의 부분합을 S_n이라고 하면

$$S_n=\frac{3\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{9}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{9}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}=\frac{9}{2}$$

따라서 이 급수는 $\frac{9}{2}$에 수렴한다.

교과서 31 쪽

예제 01 다음 급수의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 합을 구하여라.

(1) $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

❶ $\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$

풀이 (1) 제n항까지의 부분합을 S_n이라고 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n+1}$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 1이다.

(2) 제n항까지의 부분합을 S_n이라고 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$
$$=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$
$$=\sqrt{n+1}-1$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=\infty$

따라서 주어진 급수는 양의 무한대로 발산한다.

답 (1) 수렴, 1 (2) 발산

문제 2 다음 급수의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 합을 구하여라.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}\right)$

발전 **문제 3** 다음 급수의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 합을 구하여라.

$\log_a x+\log_a y=\log_a xy$

$$\log\frac{3}{1}+\log\frac{4}{2}+\log\frac{5}{3}+\cdots+\log\frac{n+2}{n}+\cdots$$

본문 해설

❶ 부분분수로 변형하거나 분모를 유리화하는 방법은 다음과 같다. (단, $d\neq0$)

(1) $\frac{1}{n(n+d)}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+d}\right)$

예 $\frac{1}{2\times4}=\frac{1}{4-2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8}$

(2) $\frac{1}{\sqrt{n+d}+\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n+d}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+d}+\sqrt{n})(\sqrt{n+d}-\sqrt{n})}$
$=\frac{\sqrt{n+d}-\sqrt{n}}{n+d-n}$
$=\frac{\sqrt{n+d}-\sqrt{n}}{d}$

예 $\frac{1}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$
$=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$

2

목표| 급수를 부분합으로 이루어진 수열의 극한으로 이해하여 그 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 제n항까지의 부분합을 S_n이라고 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right\}$$
$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{3}{4}$$

따라서 주어진 급수는 수렴하고 그 합은 $\frac{3}{4}$이다.

(2) $\frac{2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$
$=\frac{2(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})}{(2n+1)-(2n-1)}$
$=\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}$

제n항까지의 부분합을 S_n이라고 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})$$
$$=(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})$$
$$=\sqrt{2n+1}-1$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{2n+1}-1)=\infty$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

3

목표| 첫째항부터 제n항까지의 부분합을 이용하여 급수의 수렴, 발산을 조사하고 수렴하면 그 합을 구할 수 있게 한다.

풀이| $S_n=\log\frac{3}{1}+\log\frac{4}{2}+\log\frac{5}{3}+\cdots+\log\frac{n+2}{n}$

$$=\log\frac{3\times4\times5\times\cdots\times(n+2)}{1\times2\times3\times\cdots\times n}=\log\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\log\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\infty$이므로 이 급수는 양의 무한대로 발산한다.

교과서 32 쪽

이제 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 수렴, 발산과 수열의 극한값 사이의 관계에 대하여 알아보자.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 S에 수렴할 때, 제n항까지의 부분합을 S_n이라고 하면

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,\ \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$$

이다. 그런데 $a_n = S_n - S_{n-1}\ (n \geq 2)$이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1}$$
$$= S - S = 0$$

이다. 따라서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 S에 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

❶ **급수와 일반항**

(1) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이다.

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

(2)는 (1)의 대우이므로 참이다.

❷ 보기 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+3}$에서 $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+3} = \frac{1}{2} \neq 0$이므로 이 급수는 발산한다.

문제 4 다음 급수의 수렴, 발산을 조사하여라.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n-1}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^2+1}$

창의 up

영재는 명제 '급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이다.'의 역이 성립하지 않음을 반례를 통해 증명하고 있다. 영재가 증명한 방법을 구체적으로 설명하여라.

본문 해설

❶ '급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이다.'의 역이 성립하지 않으므로 수열 $\{a_n\}$의 일반항이 0으로 수렴하더라도 그 급수는 수렴하지 않는 경우가 있음을 유의하여야 한다.

즉, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$은 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하기 위한 충분조건이 아니고 필요조건이다.

❷ 급수의 수렴, 발산과 수열의 극한값 사이의 관계

- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이라고 해서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 반드시 수렴하는 것은 아님을 이해하게 한다.
- $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산하므로 이를 이용하여 급수가 발산함을 증명할 수 있게 한다.

4

목표| 급수와 일반항 사이의 관계를 이용하여 급수의 수렴과 발산을 조사할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{3n-1} = \frac{1}{3} \neq 0$

따라서 이 급수는 발산한다.

(2) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{1+\frac{1}{n^2}} = \infty \neq 0$

따라서 이 급수는 발산한다.

창의 UP

출제 의도| 급수의 일반항이 0으로 수렴하더라도 그 급수가 수렴하지 않는 경우가 있음을 알고 그 예를 찾아내어 스스로 급수와 일반항과의 관계를 설명할 수 있게 지도한다.

풀이| $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots$$
$$> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = \infty$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$은 발산한다.

지/도/자/료

급수의 수렴과 발산을 말하고 설명하여 보게 한다.

1. 급수 $1-1+1-1+1-1+\cdots$의 부분합의 수열을 $\{S_n\}$이라 하고 $n=1, 2, 3, \cdots$일 때 수열 $\{S_n\}$을 나열하면

$1, 0, 1, 0, \cdots$

이므로 수열 $\{S_n\}$은 진동한다.

따라서 주어진 급수는 발산한다.

2. 급수 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}-\cdots$의 부분합의 수열을 S_n이라 하고 $n=1, 2, 3, \cdots$일 때 수열 $\{S_n\}$을 나열하면

$1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, \cdots$

이므로 수열 $\{S_n\}$은 진동한다.

따라서 주어진 급수는 발산한다.

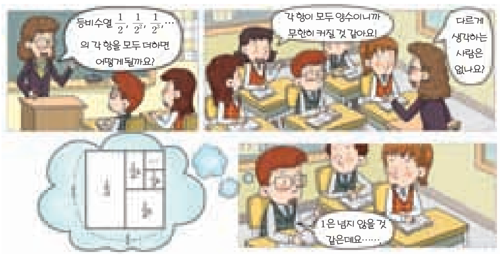
교과서 33 쪽

02 등비급수

● 등비급수의 뜻을 알고, 그 합을 구할 수 있다.

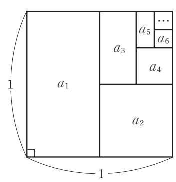
등비급수의 합은 어떻게 구하는가?

생각 열기



탐구 활동

오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형의 넓이가 $\frac{1}{2}$이 되도록 반으로 나누고, 나머지 직사각형을 넓이가 $\frac{1}{2}$이 되도록 반으로 나누는 과정을 반복할 때 만들어진 직사각형을 차례로 a_1, a_2, a_3, …이라고 하자. 다음 물음에 답하여 보자.



1. 직사각형 a_1부터 a_n까지의 넓이의 합 S_n을 구하여 보자.
2. 직사각형의 넓이의 합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$의 극한값을 구하여 보자.
3. 2의 결과와 정사각형의 넓이를 비교하여 보자.

첫째항이 $a(a\neq0)$, 공비가 r인 등비수열 $\{ar^{n-1}\}$에서 얻은 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots$$

을 첫째항이 a, 공비가 r인 **등비급수**라고 한다. 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$의 수렴, 발산을 알아보려면 부분합으로 이루어진 수열

$$S_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}$$

이 수렴하는지 발산하는지를 조사하면 된다.

새로 나온 용어와 기호

• 등비급수(等比級數, geometric series)

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 등비급수의 합을 도형을 이용하여 직관적으로 이해하고 계산을 통하여 확인하게 하는 활동이다.

1. $a_1=\frac{1}{2}$, $a_2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $a_3=\left(\frac{1}{2}\right)^3$, …이므로

$$S_n=\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=\mathbf{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

2. $\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=\mathbf{1}$

3. 정사각형의 넓이와 **2**의 결과는 **같다.**

02 등비급수

소단원 지도 목표

① 등비급수의 뜻을 알게 한다.

② 등비급수의 수렴, 발산을 판별하고, 수렴할 때 그 합을 구할 수 있게 한다.

③ 급수의 성질을 이해하게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

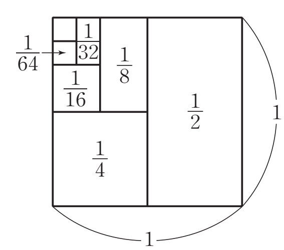
1. 등비수열과 등비급수의 뜻을 구분하여 뜻을 혼동하지 않도록 지도하고 등비수열과 등비급수의 수렴, 발산을 비교하여 이해할 수 있도록 지도한다.

2. 등비수열이 수렴하는 공비의 범위와 등비급수가 수렴하는 공비의 범위를 구분하고 올바르게 이해하도록 지도한다.

지/도/자/료

• 등비수열 $\{ar^{n-1}\}$에서는 $r=1$인 경우에 $\lim_{n\to\infty} ar^{n-1}=a$이므로 수렴하지만 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$에서는 $r=1$인 경우에 발산함을 주의하게 한다. 즉, 등비수열 a, ar, ar^2, $\cdots(a\neq0)$의 수렴 조건 $-1<r\le1$과 등비급수 $a+ar+ar^2+\cdots(a\neq0)$의 수렴 조건 $-1<r<1$을 혼동하지 않게 한다.

• 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형을 이등분하는 과정을 한없이 반복할 때



$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}$$

이라고 하면 S_n은 가장 큰 정사각형에서 가장 작은 사각형을 뺀 도형의 넓이, 즉 $1-\frac{1}{2^n}$이고 모든 자연수 n에 대하여 $S_n=1-\frac{1}{2^n}<1$이다.

이때, $\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1$이고 이것은 작은 사각형들의 넓이를 계속 더할 때 그 합은 가장 큰 정사각형의 넓이 1에 수렴한다는 뜻으로 생각할 수 있다.

본문 해설

❶ $a=1$일 때 다음과 같이 등비수열과 등비급수를 비교하여 설명할 수 있다.

등비수열 $\{r^n\}$이 수렴하도록 하는 r값의 범위는 $-1<r\le 1$

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$이 수렴하도록 하는 r값의 범위는 $-1<r<1$

$r=1$인 경우 등비수열은 1, 1, 1, 1, ⋯, 1, ⋯이므로 제n항까지의 부분합을 S_n이라고 하면

$S_n=1+1+1+\cdots+1=n$

이때 $\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} n=\infty$

따라서 $r=1$인 등비급수는 발산한다.

❷ 등비수열의 수렴 조건과 등비급수의 수렴 조건을 혼동하지 않도록 지도한다.

$r=1$이면 $S_n=na$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=\lim_{n\to\infty} S_n=\begin{cases} +\infty\,(a>0) \\ -\infty\,(a<0)\end{cases}$$

$r>1$이면 $\lim_{n\to\infty} r^{n-1}=+\infty$로 발산하고

$r\le -1$이면 $\{r^{n-1}\}$은 진동, 즉 발산한다.

교과서 34 쪽

❶ 부분합 $S_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}$에서

$r\ne 1$이면 $S_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$

$r=1$이면 $S_n=a+a+\cdots+a=na$

이므로 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$의 수렴, 발산은 다음과 같이 r의 값에 따라 결정된다.

(i) $|r|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=0$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a}{1-r}$$

❷ (ii) $|r|\ge 1$일 때, $\lim_{n\to\infty} ar^{n-1}\ne 0$이므로 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$은 발산한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

등비급수의 수렴과 발산

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots\ (a\ne 0)$은

(1) $|r|<1$일 때, 수렴하고 그 합은 $\frac{a}{1-r}$이다.

(2) $|r|\ge 1$일 때, 발산한다.

예제 01 다음 등비급수의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 값을 구하여라.

(1) $3-\frac{3}{2}+\frac{3}{4}-\frac{3}{8}+\frac{3}{16}-\cdots$ (2) $1+\frac{3}{2}+\frac{9}{4}+\frac{27}{8}+\frac{81}{16}+\cdots$

풀이 (1) 주어진 등비급수는 첫째항이 3이고 공비가 $-\frac{1}{2}$이다.

이때 $\left|-\frac{1}{2}\right|<1$이므로 이 등비급수는 수렴하고, 그 합은 $\frac{3}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{3}{\frac{3}{2}}=2$

(2) 주어진 등비급수는 첫째항이 1이고 공비가 $\frac{3}{2}$이다.

이때 $\left|\frac{3}{2}\right|>1$이므로 이 등비급수는 발산한다.

답 (1) 수렴, 2 (2) 발산

문제 1 다음 등비급수의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 값을 구하여라.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n$ (2) $2+\frac{4}{3}+\frac{8}{9}+\frac{16}{27}+\frac{32}{81}+\cdots$

1

목표 | 등비급수의 수렴, 발산은 공비의 범위에 따라 결정된다는 것을 이용하여 수렴, 발산을 조사할 수 있게 한다.

풀이 | (1) 주어진 등비급수는 첫째항이 $\frac{4}{3}$이고 공비가 $\frac{4}{3}$이다.

이때 $\frac{4}{3}>1$이므로 이 등비급수는 **발산한다.**

(2) 주어진 등비급수는 첫째항이 2이고 공비가 $\frac{2}{3}$이다.

이때 $\frac{2}{3}<1$이므로 이 등비급수는 **수렴**하고 그 합은

$$\frac{2}{1-\frac{2}{3}}=2\times 3=\mathbf{6}$$

지/도/자/료 비교판정법

어떤 급수의 수렴, 발산을 알 수 없을 때 수렴 여부를 알 수 있는 다른 급수와 비교하여 주어진 급수의 수렴, 발산을 판정하는 방법이 비교판정법이다. 예를 들어

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$은 수렴하는 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$과 유사하기 때문에 수렴할 것으로 생각해 볼 수 있다. 실제로 부등식 $\frac{1}{2^n+1}<\frac{1}{2^n}$은 주어진 급수의 각 항이 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$의 항보다 작다는 것을 나타내므로 모든 부분합은 등비급수의 합인 1에 의하여 유계이다. 또, 급수의 모든 항이 양수이므로 부분합은 증가수열이다. 따라서 주어진 급수는 수렴한다.

이 급수의 합은 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$의 합보다 작으므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}<1$이다. 급수의 모든 항이 양수인 급수의 수렴, 발산을 판정하는 데 다음과 같은 비교판정법을 사용할 수 있다.

자연수 n에 대하여 $a_n\ge b_n>0$일 때

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$도 수렴한다.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 발산하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$도 발산한다.

급수의 성질은 어떠한가?

탐구 활동

두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 일반항이 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $b_n=3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$일 때,

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$의 값을 비교하면 다음과 같다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\frac{3}{1-\frac{1}{2}}=6$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n=7$$

$$a_n+b_n=\frac{7}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\frac{\frac{7}{2}}{1-\frac{1}{2}}=7$$

위와 같은 방법으로 주어진 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 다음의 값을 비교하여 보자.

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$과 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n-\sum_{n=1}^{\infty} b_n$　　**2.** $\sum_{n=1}^{\infty} 3a_n$과 $3\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

1 수렴하는 급수의 합은 부분합으로 이루어진 수열의 극한이므로 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이용하면 다음과 같은 급수의 성질이 성립함을 알 수 있다.

급수의 성질

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴할 때

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n-\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n=c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (단, c는 상수)

보기 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=7$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=5$일 때 $\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n-2b_n)=3\sum_{n=1}^{\infty} a_n-2\sum_{n=1}^{\infty} b_n=3\cdot7-2\cdot5=11$

문제 2 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=5$이고 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=10$일 때, 다음 급수의 합을 구하여라.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(4a_n+3b_n)$　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{1}{2}b_n\right)$

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 두 급수에 각 항을 더해서 얻은 급수의 합이 원래의 급수의 합들을 더한 값과 같음을 구체적인 예를 통하여 이해하기 위한 탐구 활동이다.

1. $a_n-b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n-3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{-\frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=-\frac{5}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$=-\frac{5}{2}\times\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=-5$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n-\sum_{n=1}^{\infty} b_n=1-6=-5$$

따라서 $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n-\sum_{n=1}^{\infty} b_n}$이다.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} 3a_n=3\times\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3$, $3\sum_{n=1}^{\infty} a_n=3\times1=3$

따라서 $\boldsymbol{\sum_{n=1}^{\infty} 3a_n=3\sum_{n=1}^{\infty} a_n}$이다.

본문 해설

1 급수의 합은 그 급수의 부분합의 수열의 극한으로 정의된다. 그러므로 급수의 성질은 수열의 극한에 관한 기본 성질을 이용하여 유도할 수 있다.

수렴하는 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$의 첫째항부터 제n항까지의 부분합으로 이루어진 수열을 각각 $\{S_n\}$, $\{T_n\}$이라고 하자.

$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$, $T_n=\sum_{k=1}^{n} b_k$이고 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=S$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=T$라고 하면

$\lim_{n\to\infty} S_n=S$, $\lim_{n\to\infty} T_n=T$

이때, $\sum$의 정의와 수열의 극한의 기본 성질에 의하여 다음이 성립한다.

(1) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n} a_k+\sum_{k=1}^{n} b_k=S_n+T_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k+\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}(S_n+T_n)$$
$$=\lim_{n\to\infty} S_n+\lim_{n\to\infty} T_n=S+T$$

(2) $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n} a_k-\sum_{k=1}^{n} b_k=S_n-T_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k-\sum_{k=1}^{n} b_k\right)=\lim_{n\to\infty}(S_n-T_n)$$
$$=\lim_{n\to\infty} S_n-\lim_{n\to\infty} T_n=S-T$$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} ca_k=\lim_{n\to\infty} c\sum_{k=1}^{n} a_k=\lim_{n\to\infty} cS_n$

$$=c\lim_{n\to\infty} S_n=cS$$

2

목표 | 급수의 합과 급수의 성질을 이용하여 주어진 급수의 합을 구할 수 있게 한다.

풀이 | $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=5$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=10$이므로

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(4a_n+3b_n)=4\sum_{n=1}^{\infty} a_n+3\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

$=4\times5+3\times10=\mathbf{50}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{1}{2}b_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n=5-\frac{1}{2}\times10=\mathbf{0}$

교과서 36 쪽

예제 02 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n}$의 합을 구하여라.

풀이 $\frac{3^n+2^n}{6^n}=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n$이고

두 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$이 각각 수렴하므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$$

답 $\frac{3}{2}$

문제 3 다음 급수의 합을 구하여라.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}-\frac{1}{4^n}\right)$　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3^n}+\frac{5}{6^n}\right)$

사고력 기르기

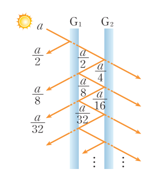
추론
의사소통
▶문제 해결

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+3b_n)$과 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2b_n)$이 모두 수렴할 때, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 수렴, 발산을 조사하여 보자.

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

어떤 식물원의 벽은 두 겹의 유리로 되어 있다고 한다. 이 벽의 두 유리 G_1, G_2는 모두 햇빛의 양의 $\frac{1}{2}$은 통과시키고, 나머지 $\frac{1}{2}$은 반사시킨다. 이 식물원의 유리 벽에 비치는 햇빛의 양을 a라고 할 때, 식물원의 내부로 들어오는 햇빛의 양은 얼마인지 구하여라.



3

목표| 등비급수의 합과 수렴하는 급수의 성질을 이용하여 주어진 급수의 합을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}-\frac{1}{4^n}\right)$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}$

$=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}-\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{1}{6}}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3^n}+\frac{5}{6^n}\right)$

$=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}+5\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6^n}$

$=2\times\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}+5\times\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}}$

$=1+1=\mathbf{2}$

사고력 기르기 문제 해결

출제 의도| 급수의 성질을 이용하여 급수의 합이나 차로 주어진 조건을 만족하는 원래의 급수에 대한 정보를 구하여 수렴, 발산을 확인할 수 있게 지도한다.

풀이| $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+3b_n)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}(2a_n+3b_n)=0$

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2b_n)$이 수렴하므로　$\lim_{n\to\infty}(a_n-2b_n)=0$

(i) $2\lim_{n\to\infty}(2a_n+3b_n)+3\lim_{n\to\infty}(a_n-2b_n)=0$

$\lim_{n\to\infty}(4a_n+6b_n+3a_n-6b_n)=7\lim_{n\to\infty}a_n=0$

따라서 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이다.

(ii) $\lim_{n\to\infty}(2a_n+3b_n)-2\lim_{n\to\infty}(a_n-2b_n)=0$

$\lim_{n\to\infty}(2a_n+3b_n-2a_n+4b_n)=7\lim_{n\to\infty}b_n=0$

따라서 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이다.

(i), (ii)에서 **두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 모두 0에 수렴한다.**

단원 과제

목표| 유리를 통하여 식물원 내부로 들어오는 햇빛의 양을 등비급수의 합을 구하는 방법으로 구해 볼 수 있게 한다.

풀이| 식물원 내부에 들어오는 햇빛의 양은

$\frac{a}{4}+\frac{a}{16}+\frac{a}{64}+\cdots$

와 같이 첫째항이 $\frac{a}{4}$이고, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비급수이므로

그 합은 $\frac{\frac{a}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\boldsymbol{\frac{a}{3}}$

교과서 37 쪽

03 등비급수의 활용

● 등비급수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있다.

등비급수를 어떻게 활용하는가?

생각 열기

탐구 활동

순환소수 $0.\dot{9}$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. $0.\dot{9}$를 등비급수로 나타내어 보자.
2. 1의 등비급수의 첫째항과 공비를 구하여 보자.
3. 등비급수의 합을 구하는 방법을 이용하여 $0.\dot{9}$의 값을 확인하여 보자.

❶ 탐구 활동에서와 같이 등비급수의 합을 구하는 방법을 이용하여 순환소수를 분수로 나타내어 보자.

예제 01 등비급수를 이용하여 순환소수 $0.2\dot{3}$을 분수로 나타내어라.

풀이 $0.2\dot{3}=0.2+0.03+0.003+0.0003+\cdots$

$$=0.2+\left(\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\frac{3}{10^4}+\cdots\right)$$

$$=0.2+\frac{\frac{3}{100}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{5}+\frac{1}{30}=\frac{7}{30}$$

답 $\frac{7}{30}$

문제 1 등비급수를 이용하여 다음 순환소수를 분수로 나타내어라.

(1) $0.\dot{3}\dot{6}$ (2) $1.3\dot{2}\dot{1}$

1. $0.\dot{9}=0.9+0.09+0.009+\cdots$

2. $0.9+0.9\times0.1+0.9\times(0.1)^2+\cdots$이므로 등비급수는 **첫째항이 0.9**이고 **공비가 0.1**인 등비수열이다.

3. $0.\dot{9}=\dfrac{0.9}{1-0.1}=\mathbf{1}$

본문 해설

❶ 순환소수를 나타내는 방법은 이미 중학교에서 배웠다. 여기에서는 순환소수가 등비급수로 나타내어짐을 이해하고 등비급수의 합을 구하는 공식을 이용하여 순환소수를 분수로 나타내게 한다.

1

목표| 등비급수를 이용하여 순환소수를 분수로 나타낼 수 있게 한다.

풀이| (1) $0.\dot{3}\dot{6}=0.36+0.0036+0.000036+\cdots$

$$=36\left(\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^6}+\cdots\right)$$

$$=\frac{36}{99}=\mathbf{\frac{4}{11}}$$

(2) $1.3\dot{2}\dot{1}=1.3+0.021+0.00021+\cdots$

$$=1.3+21\left(\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^5}+\frac{1}{10^7}+\cdots\right)$$

$$=\frac{13}{10}+\frac{21}{990}=\mathbf{\frac{218}{165}}$$

03 등비급수의 활용

소단원 지도 목표

① 등비급수를 활용하여 순환소수를 분수로 나타낼 수 있게 한다.

② 등비급수를 활용하여 여러 가지 문제를 해결할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 도형에 대한 문제와 실생활 문제에서 등비급수를 활용할 수 있도록 규칙을 찾는 연습을 충분히 하도록 지도한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 순환소수가 등비급수로 나타내어짐을 이해하고 등비급수의 합을 이용하여 순환소수를 분수로 나타내는 것을 이해하게 하는 활동이다.

지/도/자/료

중학교에서 이미 순환소수를 분수로 나타내는 방법을 공부하였다. 예를 들어 순환소수 $0.\dot{9}$에 대하여

$x=0.99999\cdots$, $10x=9.99999\cdots$

라 하고 $10x-x=9$, $9x=9$, $x=1$

즉, $0.\dot{9}=1$이라고 나타내었다.

그러나 이러한 결과에 확신을 가지려면 한없이 반복되는 과정의 최종 결과를 나타낸다는 것을 이해해야 한다. 이를 위해 부분합으로 이루어진 수열의 극한으로 정의된 급수의 이해가 중요한데 급수에서 +의 의미는 더하는 과정이 계속된다는 것이 아니라 덧셈의 최종 결과를 나타내는 것으로 이해하도록 하게 한다.

본문 해설

❶ 같은 꼴의 한없이 되풀이되는 도형 문제는 다음과 같은 순서로 해결한다.

① 되풀이되는 규칙을 찾는다.

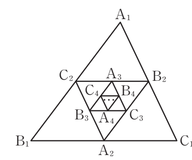
② 등비급수를 찾는다.

③ 첫째항과 공비를 찾는다.

도형이 줄어들거나 늘어나는 규칙이 있는데 이러한 규칙은 도형의 닮음을 이용하여 찾거나 a_1, a_2, a_3, $\cdots$을 구하여 추측하게 한다.

교과서 38 쪽

예제 02 오른쪽 그림과 같이 둘레의 길이가 a인 삼각형 $A_1B_1C_1$의 각 변의 중점을 이어 삼각형 $A_2B_2C_2$를 만든다. 이와 같은 방법으로 삼각형 $A_3B_3C_3$, $A_4B_4C_4$, $\cdots$를 만들어 나갈 때, $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_2B_2C_2$, $\triangle A_3B_3C_3$, $\cdots$의 둘레의 길이의 합을 구하여라.

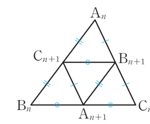


풀이 오른쪽 그림에서

❶ $\overline{A_{n+1}B_{n+1}}=\frac{1}{2}\overline{A_nB_n}$, $\overline{B_{n+1}C_{n+1}}=\frac{1}{2}\overline{B_nC_n}$,

$\overline{A_{n+1}C_{n+1}}=\frac{1}{2}\overline{A_nC_n}$

이므로 삼각형 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$과 삼각형 $A_nB_nC_n$은 닮음비가 $1:2$인 닮은 삼각형이다.

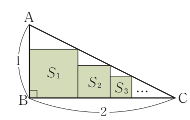


따라서 ($\triangle A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$의 둘레의 길이)$=\frac{1}{2}$($\triangle A_nB_nC_n$의 둘레의 길이)이므로

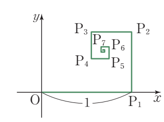
$\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_2B_2C_2$, $\triangle A_3B_3C_3$, $\cdots$의 둘레의 길이의 합은

$a+\frac{1}{2}a+\left(\frac{1}{2}\right)^2a+\cdots=\frac{a}{1-\frac{1}{2}}=2a$ 답 $2a$

문제 2 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=2$이고, $\angle B=90°$인 직각삼각형 ABC에 정사각형 S_1, S_2, S_3, $\cdots$이 내접하도록 하여 한없이 만들 때, 이들 정사각형의 넓이의 합을 구하여라.



문제 3 오른쪽 그림과 같이 원점 O에서 x축의 양의 방향으로 1만큼 움직인 점을 P_1, 점 P_1에서 y축의 양의 방향으로 $\frac{2}{3}$만큼 움직인 점을 P_2, 점 P_2에서 x축의 음의 방향으로 $\left(\frac{2}{3}\right)^2$만큼 움직인 점을 P_3, 점 P_3에서 y축의 음의 방향으로 $\left(\frac{2}{3}\right)^3$만큼 움직인 점을 P_4라고 하자. 이와 같은 방법으로 점 P_n이 한없이 움직일 때, 점 P_n이 가까워지는 점의 좌표를 구하여라.



2

목표| 등비급수를 이용하여 도형에 대한 문제(내접하는 정사각형의 넓이의 합)을 해결할 수 있게 한다.

풀이| 삼각형 ABC와 정사각형을 제외한 각 직각삼각형은 서로 닮음이다.

따라서 정사각형 S_1의 한 변의 길이를 $2k$라고 하면

$1:2=(1-2k):2k$

$2k=2-4k$, $k=\frac{1}{3}$

그러므로

정사각형 S_1의 한 변의 길이는 $\frac{2}{3}$이므로 넓이는 $\left(\frac{2}{3}\right)^2$

마찬가지 방법으로

정사각형 S_2의 한 변의 길이는 $\left(\frac{2}{3}\right)^2$이므로 넓이는 $\left(\frac{2}{3}\right)^4$

정사각형 S_3의 한 변의 길이는 $\left(\frac{2}{3}\right)^3$이므로 넓이는 $\left(\frac{2}{3}\right)^6$

$\vdots$

따라서 정사각형의 넓이의 합은

$S_1+S_2+S_3+\cdots$

$=\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^4+\left(\frac{2}{3}\right)^6+\cdots$

$=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{4}{9}\times\frac{9}{5}=\mathbf{\frac{4}{5}}$

3

목표| 등비급수를 이용하여 도형에 대한 문제에서 점의 좌표를 구할 수 있게 한다.

풀이| 점 P_n이 점 (x, y)에 한없이 가까워진다고 하면

$x=\overline{OP_1}-\overline{P_2P_3}+\overline{P_4P_5}-\overline{P_6P_7}+\cdots$

$=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^4-\left(\frac{2}{3}\right)^6+\cdots=\frac{1}{1-\left(-\frac{4}{9}\right)}=\frac{9}{13}$

$y=\overline{P_1P_2}-\overline{P_3P_4}+\overline{P_5P_6}-\overline{P_7P_8}+\cdots$

$=\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^5-\left(\frac{2}{3}\right)^7+\cdots$

$=\frac{\frac{2}{3}}{1-\left(-\frac{4}{9}\right)}=\frac{2}{3}\times\frac{9}{13}=\frac{6}{13}$

따라서 점 P_n은 점 $\mathbf{\left(\frac{9}{13}, \frac{6}{13}\right)}$에 가까워진다.

중/단/원 기초

1

목표| 급수의 수렴, 발산을 조사할 수 있게 한다.

중단원 기초

[해답 p.193]

수준별 학습

1 다음 급수의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 합을 구하여라. — 01 급수의 수렴과 발산

(1) $1+3+5+7+\cdots+(2n-1)+\cdots$

(2) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\cdots$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$

2 다음 급수가 발산함을 보여라. — 01 급수의 수렴과 발산 / 급수와 일반항

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3n+2}$　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)$　(4) $\sum_{n=2}^{\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2})$

3 다음 등비급수의 합을 구하여라. — 02 등비급수 / 등비급수의 수렴과 발산

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+1}$　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(2-\sqrt{3})^n$

4 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=3$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=-2$일 때, 다음 급수의 합을 구하여라. — 02 등비급수 / 급수의 성질

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+b_n)$　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n-2b_n)$　(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{3}-\frac{b_n}{2}\right)$

5 등비급수를 이용하여 다음 순환소수를 분수로 나타내어라. — 03 등비급수의 활용

(1) $0.\dot{1}\dot{2}$　(2) $0.7\dot{1}$　(3) $1.\dot{3}\dot{5}$

풀이| (1) 제n항까지의 부분합을 S_n이라고 하면

$$S_n=1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}n^2=\infty$이므로 발산한다.

(2) 제n항까지의 부분합을 S_n이라고 하면

$$S_n=1+\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}$$

따라서 $\frac{2}{3}$로 수렴한다.

(3) $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\sqrt{n+1}-1$$

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=\infty$이므로 발산한다.

(4) $\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}=\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=1-\frac{1}{2n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=1$$

따라서 1로 수렴한다.

2

목표| 급수의 발산을 확인할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3n+2}=\frac{2}{3}\neq0$이므로 발산한다.

(2) $\lim_{n\to\infty}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=1\neq0$이므로 발산한다.

(3) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=\frac{1}{2}\neq0$이므로 발산한다.

(4) $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2})=2\neq0$이므로 발산한다.

3

목표| 등비급수의 수렴과 발산을 확인할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\frac{1}{\sqrt{2}}<1$이므로 수렴하고 그 합은

$$\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}-1)}=\mathbf{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

(2) $2-\sqrt{3}<1$이므로 수렴하고 그 합은

$$\frac{2-\sqrt{3}}{1-(2-\sqrt{3})}=\frac{2-\sqrt{3}}{-1+\sqrt{3}}=\mathbf{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

4

목표| 급수의 성질을 이용하여 급수의 합을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+b_n)=2\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\mathbf{4}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n-2b_n)=3\sum_{n=1}^{\infty}a_n-2\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\mathbf{13}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{3}-\frac{b_n}{3}\right)=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\mathbf{2}$

5

목표| 등비급수를 이용하여 나타낼 수 있게 한다.

풀이| (1) $0.\dot{1}\dot{2}=12\left(\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^6}+\cdots\right)=\mathbf{\frac{4}{33}}$

(2) $0.7\dot{1}=0.7+\left(\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}+\cdots\right)=\mathbf{\frac{32}{45}}$

(3) $1.\dot{3}\dot{5}=1+35\left(\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^6}+\cdots\right)=\mathbf{\frac{134}{99}}$

중/단/원 기본

1

목표| 여러 가지 급수의 수렴과 발산을 확인할 수 있게 한다.

풀이| ㉠ 제n항까지의 부분합 S_n은 -1 또는 0이므로 발산한다.

㉡ 제n항까지의 부분합 S_n이

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)^2-1}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+1)(2k-1)}$$
$$=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k-1}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}-1\right)$$
$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}-1\right)\right\}=\frac{1}{2}$$

㉢ 제n항까지의 부분합 S_n이

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)}$$
$$=2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2$$

㉣ 제n항까지의 부분합 S_n이

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\log_2\frac{k+2}{k+1}=\log_2\frac{n+2}{2}=\log_2(n+2)-1$$
$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\{\log_2(n+2)-1\}=\infty$$

따라서 수렴하는 것은 ㉡, ㉢이다.

2

목표| 극한과 급수의 성질을 이용하여 특별한 일반항의 극한을 구할 수 있게 한다.

풀이| 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n-4n+6}{5a_n+2n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3a_n}{n}-4+\frac{6}{n}}{\frac{5a_n}{n}+2+\frac{5}{n}}=\mathbf{-2}$$

교과서 40 쪽

중단원 기본

[해답 p.193]

수준별 학습

1 다음 급수 중에서 수렴하는 것을 모두 찾아라. — 01 급수의 수렴과 발산

㉠ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$	㉡ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2-1}$
㉢ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$	㉣ $\sum_{n=1}^{\infty}\log_2\frac{n+2}{n+1}$

2 수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=3$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n-4n+6}{5a_n+2n+5}$의 값을 구하여라. — 01 급수의 수렴과 발산 급수와 일반항

3 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}3(1-x^2)^{n-1}$에 대하여 다음 물음에 답하여라. — 02 등비급수 등비급수의 수렴과 발산

(1) 위의 급수가 수렴하기 위한 실수 x값의 범위를 구하여라.

(2) (1)에서 구한 범위에서 주어진 급수의 합을 구하여라.

4 다음 급수의 합을 구하여라. — 02 등비급수 급수의 성질

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2}{6^{n-1}}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}-3^{n-1}}{6^{n+1}}$

5 연희의 태블릿 PC 건전지는 방전될 때까지 처음 사용 가능한 시간이 90시간이었고, 충전하여 사용할 때마다 사용 가능한 시간이 바로 전 사용 가능한 시간의 $\frac{1}{100}$배씩 줄어들었다. 연희의 태블릿 PC를 방전되어 충전하는 과정을 반복할 때, 사용 가능한 시간의 합을 구하여라. — 03 등비급수의 활용

3

목표| 등비급수의 수렴하는 공비의 범위를 알고 그 합을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}3(1-x^2)^{n-1}$이 수렴하려면 공비 $|1-x^2|<1$이어야 한다.

즉 $-1<1-x^2<1$에서 $0<x^2<2$

따라서 $\mathbf{-\sqrt{2}<x<0}$ **또는** $\mathbf{0<x<\sqrt{2}}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}3(1-x^2)^{n-1}=3\times\frac{1}{1-(1-x^2)}=\mathbf{\frac{3}{x^2}}$

4

목표| 급수의 성질을 이용하여 여러 가지 등비급수로 혼합된 급수의 합을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2}{6^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}=\mathbf{\frac{42}{5}}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}-3^{n-1}}{6^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-\frac{1}{36}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\mathbf{\frac{1}{9}}$

교과서 41 쪽

중단원 실력

[해답 p.193]

수준별 학습

1 수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 **01 급수의 수렴과 발산**

$$\left(\frac{a_1}{2}-3\right)+\left(\frac{a_2}{4}-3\right)+\left(\frac{a_3}{6}-3\right)+\cdots$$

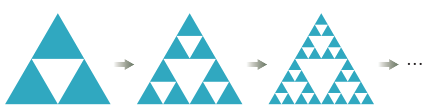
이 수렴할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3a_n-4n}{8n-a_n}$의 값을 구하여라.

2 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=2$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2=\frac{4}{3}$일 때, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^3$의 값을 구하여라. **02 등비급수**

3 $\frac{304}{999}$를 소수로 나타낼 때, 소수점 아래 n번째 자리 숫자를 a_n이라고 한다. **02 등비급수**

이때 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$의 값을 구하여라.

4 다음 그림과 같이 넓이가 1인 정삼각형의 각 변의 중점을 연결하여 가운데 정삼각형을 제거한 후 남은 부분의 넓이를 a_1, 다시 남아 있는 정삼각형들의 각 변의 중점을 연결하여 각각 가운데 정삼각형을 제거한 후 남은 부분의 넓이를 a_2라고 하자. 이와 같은 과정을 한없이 계속할 때, $a_1+a_2+a_3+\cdots$의 값을 구하여라. **03 등비급수의 활용**



5

목표 실생활에서 나타나는 현상을 등비급수를 이용하여 구할 수 있게 한다.

풀이 사용 가능한 시간의 합은

$$90+90\times\frac{99}{100}+90\times\left(\frac{99}{100}\right)^2+90\times\left(\frac{99}{100}\right)^3+\cdots$$

$$=90\times\frac{1}{1-\frac{99}{100}}=90\times100=\mathbf{9000}(\text{시간})$$

중/단/원 실력

1

목표 특별한 일반항의 극한을 구할 수 있게 한다.

풀이 제n항까지의 부분합 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{2k}-3\right)$이고

이 급수가 수렴하므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{2n}-3\right)=0$에서 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n}=3$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n-4n}{8n-a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3a_n}{2n}-2}{4-\frac{a_n}{2n}}$$

$$=\frac{3\cdot3-2}{4-3}=\mathbf{7}$$

2

목표 등비급수의 합을 구할 수 있게 한다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 $r(-1<r<1)$라고 하면

$$\frac{a}{1-r}=2,\ \frac{a^2}{1-r^2}=\frac{4}{3}$$

따라서 $a=1$, $r=\frac{1}{2}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^3=\frac{a^3}{1-r^3}=\frac{1}{1-\frac{1}{8}}=\mathbf{\frac{8}{7}}$$

3

목표 등비급수의 합을 구할 수 있게 한다.

풀이 $\frac{304}{999}=0.\dot{3}0\dot{4}=0.304304304\cdots$

$=(0.3+0.0003+0.0000003+\cdots)$
$+(0.004+0.000004+\cdots)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$$

$$=3\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^7}+\cdots\right)+4\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{2^9}+\cdots\right)$$

$$=3\times\frac{4}{7}+4\times\frac{1}{7}=\mathbf{\frac{16}{7}}$$

4

목표 삼각형의 넓이의 합을 구할 수 있게 한다.

풀이 $a_1=1\times\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$, $a_2=3\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\left(\frac{3}{4}\right)^2$, $a_3=\left(\frac{3}{4}\right)^3$, $\cdots$, $a_n=\left(\frac{3}{4}\right)^n$

$$a_1+a_2+a_3+\cdots=\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}=\mathbf{3}$$

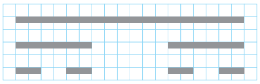
교과서 42 쪽

수행 과제

칸토어 집합

독일의 수학자 칸토어(Cantor, G. ; 1845~1918)는 급수에 대한 연구에 몰두하다가 집합에 대한 개념이 필요하다는 것을 깨닫고, 오랜 연구 끝에 집합론을 창시하게 되었다. 특히 그는 무한집합에 깊이 있는 연구를 진행하였는데, 다음은 그가 생각해 낸 집합을 구성하는 방법이다.

❶ 길이가 1인 선분을 그린다.
❷ [1단계] 길이가 1인 선분을 삼등분하여 가운데 부분을 버린다.
❸ [2단계] 남은 두 선분을 각각 삼등분하여 가운데 부분을 버린다.



이와 같은 과정을 계속 반복하여 남게 되는 점들의 집합을 칸토어 집합(Cantor set)이라고 한다. 이 과정의 n단계에서 버려지는 선분의 개수를 a_n, 버려지는 선분 한 개의 길이를 l_n이라 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.

| 과 제 | 1 두 수열 $\{a_n\}$, $\{l_n\}$의 일반항을 각각 구하여 보자.

| 과 제 | 2 두 극한값 $\lim_{n\to\infty} a_n$, $\lim_{n\to\infty} l_n$을 각각 구하여 보자.

| 과 제 | 3 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n l_n$을 구하고, 이로부터 알 수 있는 칸토어 집합의 특징을 말하여 보자.

교과서 43 쪽

대단원 학습 내용 정리

❶ 수열의 수렴과 발산

수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커질 때, 일반항 a_n의 값이 어떤 실수 α에 한없이 가까워지면 수열 $\{a_n\}$은 α에 수렴한다고 하며, 이것을 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha \quad \text{또는} \quad n\to\infty\text{일 때 } a_n\to\alpha$$

❷ 수열의 극한에 관한 기본 성질

수열의 극한에 대한 기본 성질

수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여
$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$일 때

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha+\beta$
(2) $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha-\beta$
(3) $\lim_{n\to\infty} ca_n=c\lim_{n\to\infty} a_n=c\alpha$ (단, c는 상수)
(4) $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\lim_{n\to\infty} a_n\cdot\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha\beta$
(5) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ (단, $b_n\neq0$, $\beta\neq0$)

수열의 극한값의 대소 관계

수렴하는 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여
$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$일 때

(1) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le b_n$이면 $\alpha\le\beta$이다.
(2) 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le c_n\le b_n$을 만족시키고 $\alpha=\beta$이면, 수열 $\{c_n\}$은 수렴하고 $\lim_{n\to\infty} c_n=\alpha$이다.
(3) (1)에서 $a_n<b_n$이라고 해서 반드시 $\lim_{n\to\infty} a_n<\lim_{n\to\infty} b_n$이 성립하는 것은 아니다.

❸ 등비수열 $\{r^n\}$의 극한값

(1) $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$ (발산)
(2) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=1$ (수렴)
(3) $|r|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=0$ (수렴)
(4) $r\le-1$일 때, 수열 $\{r^n\}$은 진동한다. (발산)

❹ 급수의 수렴과 발산

급수

(1) 급수: 수열 $\{a_n\}$의 각 항을 차례로 덧셈 기호 +를 사용하여 연결한 식

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

(2) 부분합: 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$에서 첫째항부터 제n항까지의 합

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$$

(3) 급수의 합: 부분합으로 이루어진 수열 $\{S_n\}$이 수렴하는 값

급수와 일반항

(1) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이다.
(2) $\lim_{n\to\infty} a_n\neq0$이면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

❺ 등비급수

등비급수의 수렴과 발산

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots(a\neq0)$은

(1) $|r|<1$일 때, 수렴하고 그 합은 $\dfrac{a}{1-r}$이다.
(2) $|r|\ge1$일 때, 발산한다.

급수의 성질

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴할 때

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n$
(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n-\sum_{n=1}^{\infty} b_n$
(3) $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n=c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (단, c는 상수)

| 용어와 기호 | 수렴, 극한(값), 무한대, 발산, 급수, 부분합, 급수의 합, 등비급수, $\lim_{n\to\infty} a_n$, ∞, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

수행 과제

● 수행 과제 의도

칸토어 집합이라고 하는 특수한 집합을 수열과 연관지어 단계적 과정을 이해한 후 선분의 개수와 선분의 길이를 표현해 보고 칸토어 집합의 특징을 추론할 수 있는지 확인한다.

과제 1 _풀이 $\{a_n\}$: 1, 2, 4, $\cdots$이므로 $\quad \boldsymbol{a_n=2^{n-1}}$

$\{l_n\}$: $\dfrac{1}{3}$, $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$, $\left(\dfrac{1}{3}\right)^3$, $\cdots$이므로 $\quad \boldsymbol{l_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}$

과제 2 _풀이

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} 2^{n-1}=\infty,\ \lim_{n\to\infty} l_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\mathbf{0}$$

과제 3 _풀이

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_nl_n=\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{1-\dfrac{2}{3}}=\frac{1}{3}\times3=\mathbf{1}$$

따라서 버려지는 선분의 개수와 그 길이의 곱이 1 즉 버려지는 선분의 총길이가 1이 되므로 칸토어 집합의 길이는 0이면서 셀 수 없는 무한집합임을 알 수 있다.

지/도/자/료 칸토어 집합

구간 $I=[0,\ 1]$의 부분집합을 다음과 같이 정의하자. 구간 I를 삼등분하여 가운데 열린 구간 J_1을 제거하자.

즉, $I_1=I-J_1=I-\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$로 놓고 I_1의 두 닫힌 구간 $\left[0,\ \dfrac{1}{3}\right]$, $\left[\dfrac{2}{3},\ 1\right]$에서도 똑같은 과정을 반복한다. 즉,

$$I_2=I_1-J_2=\left[0,\ \frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{2}{9},\ \frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\ \frac{7}{9}\right]\cup\left[\frac{8}{9},\ 1\right]$$

로 정의하고 I_2의 네 닫힌 구간에서도 같은 과정을 반복하고 이러한 과정을 계속하면 I_n은 닫힌 구간 2^n개의 합집합으로 표시된다. 이때 감소하는 집합열 $\{I_n\}$들의 교집합은 $C=\cap_{n=1}^{\infty}\{I_n\}$으로 놓고 칸토어 집합이라 한다.

교과서 44 쪽

대 / 단 / 원 평가 문제

I. 수열의 극한

선택형

1 다음 수열 중에서 수렴하는 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $\{2+(-1)^n\}$ ② $\left\{\dfrac{(-1)^n\cdot n}{n+2}\right\}$

③ $\left\{\dfrac{(-1)^n\cdot 2}{n}\right\}$ ④ $\left\{\dfrac{n}{\sqrt{2n}}\right\}$

⑤ $\left\{\dfrac{500}{n}\right\}$

2 수열 $\{a_n\}$이 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}=1$을 만족시킬 때, 다음 중에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

㉠ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$	㉡ $\lim\limits_{n\to\infty} a_{4n}=1$
㉢ $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1}=1$	

① ㉡ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

3 이차방정식 $x^2-(2n^2-1)x+n^2=0$의 두 근을 α_n, β_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\alpha_n}+\dfrac{1}{\beta_n}\right)$의 값은?

① 0 ② $\dfrac{1}{2}$ ③ 1
④ $\dfrac{3}{2}$ ⑤ 2

4 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$의 값은?

① 0 ② $\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{2}{3}$
④ 1 ⑤ $\dfrac{4}{3}$

5 $r<-1$일 때, 수열 $\left\{\dfrac{2+r^{2n+1}}{3+r^{2n}}\right\}$의 극한값은?

① $-\dfrac{2}{3}$ ② $\dfrac{2}{3}$ ③ 0
④ $-r$ ⑤ r

6 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6^n+3^n}{(2^n+1)(3^n+1)}$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

7 다음 급수 중에서 수렴하는 것만을 있는 대로 고른 것은?

㉠ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n}{3n+2}$	㉡ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5}{3^n}$
㉢ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3}{n(n+2)}$	㉣ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n-2^n}{3^n+2^n}$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉣

8 급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하고, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(3a_n+b_n)=7$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=5$일 때, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n+\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

대 / 단 / 원 평가 문제

1

목표| 수열의 수렴, 발산을 확인할 수 있게 한다.

풀이| ① $1,\ 3,\ 1,\ 3,\ \cdots$이므로 발산한다.

② $-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{3}{5},\ \dfrac{2}{3},\ \cdots$이므로 발산한다.

③ $-2,\ 1,\ -\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{2}{5},\ \dfrac{1}{3},\ \cdots$로 0에 한없이 가까워지므로 수렴한다.

④ $\sqrt{2},\ 1,\ \dfrac{3}{\sqrt{6}},\ \dfrac{2}{\sqrt{2}},\ \cdots$이므로 발산한다.

⑤ $500,\ 250,\ \dfrac{500}{3},\ 125,\ 100,\ \cdots$으로 0에 한없이 가까워지므로 수렴한다.

답 ③, ⑤

2

목표| 주어진 일반항의 극한을 이용할 수 있게 한다.

풀이| ㉡ 수열 a_{2n}은 $a_2,\ a_4,\ a_6,\ a_8,\ \cdots$인 수열이고 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}=1$이므로 수열 $\{a_{4n}\}$: $a_4,\ a_8,\ a_{12},\ a_{16},\ \cdots$은 수렴한다.

㉠ 수열 $\{a_n\}$: $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \cdots$

㉢ 수열 $\{a_{2n-1}\}$: $a_1,\ a_3,\ a_5,\ a_7,\ \cdots$

이 수렴 또는 발산하는지는 알 수 없다.

답 ①

3

목표| 이차방정식의 근을 이용한 수열의 일반항의 극한을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\alpha_n+\beta_n=2n^2-1,\ \alpha_n\beta_n=n^2$이므로

$$\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}=\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\beta_n}=\frac{2n^2-1}{n^2}=2-\frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n^2}\right)=2$$

답 ⑤

4

목표| 자연수의 거듭제곱의 합을 이용한 수열의 일반항의 극한을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

답 ②

5

목표| 공비의 범위에 따르는 수렴성을 이용하여 주어진 수열의 일반항의 극한을 구할 수 있게 한다.

풀이| $r<-1$일 때 $r^2>1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2+r^{2n+1}}{3+r^{2n}}\right\}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\dfrac{2}{r^{2n}}+r}{\dfrac{3}{r^{2n}}+1}\right\}=r$$

답 ⑤

6

목표| 등비수열의 의미를 알고 주어진 수열의 일반항의 극한을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6^n+3^n}{(2^n+1)(3^n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6^n+3^n}{6^n+2^n+3^n+1}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\dfrac{3}{6}\right)^n}{1+\left(\dfrac{2}{6}\right)^n+\left(\dfrac{3}{6}\right)^n+\left(\dfrac{1}{6}\right)^n}=1$$

답 ②

7

목표| 여러 가지 급수의 수렴과 발산을 확인할 수 있게 한다.

풀이| ㉠ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{3n+2}=\dfrac{2}{3}$이므로 발산한다.

㉡ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5}{3^n}=0$이므로 수렴한다.

㉢ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n(n+2)}=0$이므로 수렴한다.

㉣ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n-2^n}{3^n+2^n}=\dfrac{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}=1$이므로 발산한다.

답 ④

참고| ㉢ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n(n+2)}$의 부분합은

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{k(k+2)}$$

$$=\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\frac{3}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{9}{4}$$

8

목표| 급수의 성질을 이용하여 수렴하는 급수의 합을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\ \sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴하므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n+b_n)=3\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n=7 \quad\cdots\cdots ㉠$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}b_n=5 \quad\cdots\cdots ㉡$$

㉠+㉡을 하면 $4\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=12,\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n=3$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=3$을 ㉠에 대입하면 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n=-2$

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n=1$

답 ②

9

목표| 진동하는 급수의 수렴과 발산을 확인할 수 있게 한다.

교과서 45 쪽

[해답 p.194]

9 다음 급수 중에서 수렴하는 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{3}{4}+\cdots$

② $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\cdots$

③ $1+(-1)+1+(-1)+1+\cdots$

④ $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots$

⑤ $2-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\cdots$

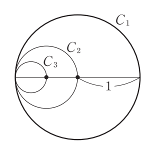
10 등비급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}r^n$이 수렴할 때, 다음 급수 중에서 반드시 수렴한다고 할 수 없는 것은?

① $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(r^n+r^{2n})$ ② $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(r^n-2r^{2n})$

③ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n+(-r)^n}{2}$ ④ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r-1}{2}\right)^n$

⑤ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{2}-1\right)^n$

11 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원 C_1의 중심을 지나고 C_1에 내접하는 원을 C_2, 원 C_2의 중심을 지나고 C_2에 내접하는 원을 C_3이라고 하자. 이와 같은 과정을 한없이 반복할 때, 모든 원의 넓이의 합은?



① $\frac{\pi}{3}$ ② $\frac{2}{3}\pi$ ③ π

④ $\frac{4}{3}\pi$ ⑤ $\frac{5}{3}\pi$

서답형

12 수열 $\{a_n\}$이 $\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)a_n=3$을 만족할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}(4n+3)a_n$의 값을 구하여라.

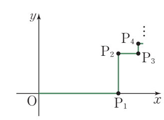
13 급수 $\log_4\sqrt{2}+\log_4\sqrt{\sqrt{2}}+\log_4\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}+\cdots$의 합을 구하여라.

|서|술|형|

14 등비수열 $\left\{(x-2)\left(\dfrac{2x+1}{3}\right)^n\right\}$이 수렴하도록 하는 정수 x를 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

|서|술|형|

15 오른쪽 그림과 같이 점 P_n이 원점 O를 출발하여 x축 또는 y축과 평행하게 P_1, P_2, P_3, …으로 움직인다.



$\overline{\mathrm{OP}_1}=3$, $\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OP}_1}$, $\overline{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}$, …일 때, 점 P_n이 한없이 가까워지는 점의 좌표를 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

풀이| ① 급수 $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{3}{4}+\cdots$은

$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=0,\ \lim\limits_{n\to\infty}S_{2n-1}=1$이므로 발산한다.

② 급수 $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\cdots$은

$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=0,\ \lim\limits_{n\to\infty}S_{2n-1}=0$이므로 수렴한다.

③ 급수 $1+(-1)+1+(-1)+1+\cdots$는

$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=0,\ \lim\limits_{n\to\infty}S_{2n-1}=1$이므로 발산한다.

④ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}$이므로 수렴한다.

⑤ 급수 $2-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\cdots$는

$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=1,\ \lim\limits_{n\to\infty}S_{2n-1}=2$이므로 발산한다. 답 ②, ④

10

목표| 공비의 범위에 따르는 수렴성을 이용하여 주어진 급수의 수렴과 발산을 확인할 수 있게 한다.

풀이| 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$이 수렴하므로 $-1<r<1$이다.

$-1<r<1$, $-1<r^2<1$이므로

① $\sum_{n=1}^{\infty} (r^n+r^{2n})=\sum_{n=1}^{\infty} r^n+\sum_{n=1}^{\infty} (r^2)^n$은 수렴한다.

② $\sum_{n=1}^{\infty} (r^n-2r^{2n})=\sum_{n=1}^{\infty} r^n-2\sum_{n=1}^{\infty} (r^2)^n$은 수렴한다.

③ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n+(-r)^n}{2}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \{r^n+(-r)^n\}$

$=\frac{1}{2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} r^n+\sum_{n=1}^{\infty} (-r)^n\right\}$

은 수렴한다.

④ $-1<r<1$에서 $-2<r-1<0$, $-1<\frac{r-1}{2}<0$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r-1}{2}\right)^n$은 수렴한다.

⑤ $-1<r<1$이면 $-\frac{3}{2}<\frac{r}{2}-1<-\frac{1}{2}$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{2}\right)^n$은 반드시 수렴한다고 할 수 없다.

답 ⑤

11

목표| 만들어지는 원의 넓이가 순서대로 등비급수로 나타나는 것을 알게 하고 등비급수의 합을 구할 수 있게 한다.

풀이| 원 C_1, C_2, C_3, $\cdots$의 넓이는 π, $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{1}{16}\pi$, $\cdots$이므로 모든 원의 넓이의 합은

$$\pi+\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{16}\pi+\cdots=\pi\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\cdots\right)$$

$$=\pi\times\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}\pi$$

답 ④

12

목표| 주어진 극한값을 이용하여 유사한 형태의 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $(2n+1)a_n=b_n$으로 놓으면 $a_n=\frac{b_n}{2n+1}$

이때 $\lim_{n\to\infty} b_n=3$이므로

$$\lim_{n\to\infty}(4n+3)a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+3}{2n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}b_n$$

$$=2\cdot3=6$$

답 6

13

목표| 로그의 성질을 이용하여 주어진 급수의 합을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\log_4\sqrt{2}+\log_4\sqrt{\sqrt{2}}+\log_4\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}+\cdots$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

답 $\frac{1}{2}$

14

목표| 등비수열이 수렴하는 조건을 알고 주어진 등비수열이 수렴할 때 공비의 범위를 정할 수 있다는 것을 알게 한다.

풀이| $x-2=0$ 또는 $-1<\frac{2x+1}{3}\le1$이어야 하므로

$x=2$ 또는 $-2<x\le1$

따라서 정수 x는 -1, 0, 1, 2이다.

답 -1, 0, 1, 2

채점 기준

영역	채점 요소	배점
해결 과정	등비수열이 수렴하는 조건 나타내기	50%
	등비수열이 수렴하는 조건에서 x의 값 또는 x의 범위 구하기	30%
답 구하기	정수 x의 값을 모두 구하기	20%

15

목표| 그려지는 선분의 길이의 자취가 등비수열을 이루는 것을 확인하고 이 사실을 이용하여 선분의 자취의 극한을 구하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 점 P_n이 점 (x, y)에 한없이 가까워진다고 하면

$$x=\overline{OP_1}+\overline{P_2P_3}+\overline{P_4P_5}+\cdots=\frac{3}{1-\frac{1}{4}}=4$$

$$y=\overline{P_1P_2}+\overline{P_3P_4}+\overline{P_5P_6}+\cdots=\frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{4}}=2$$

따라서 점 P_n은 점 $(4, 2)$에 가까워진다.

답 $(4, 2)$

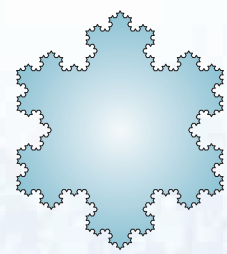
채점 기준

영역	채점 요소	배점
해결 과정	구하는 점의 좌표 설정하기	20%
	점 P_n이 가까워지는 점의 x좌표 값을 선분의 합으로 나타내어 구하기	35%
	점 P_n이 가까워지는 점의 y좌표 값을 선분의 합으로 나타내어 구하기	35%
답 구하기	점 P_n이 가까워지는 점의 좌표 구하기	10%

M+Art

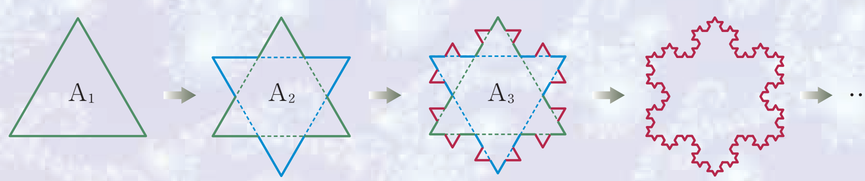
수 학 + 예 술

프랙털의 세계



코흐 곡선은 1906년 스웨덴의 수학자 코흐(von Koch, H. ; 1870~1924)가 구성한 곡선으로 유한의 넓이를 둘러싸는 무한대 길이의 곡선이다. 코흐 곡선 가운데 처음으로 시작하는 도형이 정삼각형일 경우 오른쪽 그림과 같이 그 모양이 눈의 결정체와 유사하여 '눈송이 곡선'이라고 한다. 이 곡선은 다음의 과정에 의하여 만들 수 있다.

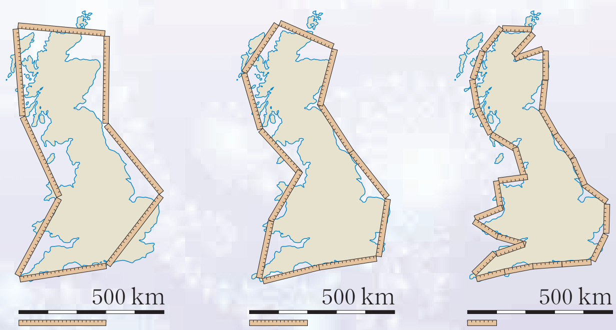
❶ 정삼각형 A_1의 각 변을 삼등분하고, 가운데 선분 위에 그것을 한 변으로 하는 정삼각형을 그리고 가운데 선분은 지워서 도형 A_2를 만든다.
❷ 도형 A_2의 각 변에 대하여 ❶의 과정을 반복하여 도형 A_3을 만든다.
❸ 이와 같은 과정을 무한히 반복하면 코흐 눈송이가 완성된다.



코흐 눈송이의 둘레의 길이는 일정한 값으로 수렴하지 않고 무한히 커지지만, 한 변의 길이가 1인 정삼각형으로 만든 코흐 눈송이의 넓이는 등비급수의 합을 구하는 방법을 이용하면 $\frac{2\sqrt{3}}{5}$으로 수렴하는 것을 알 수 있다.

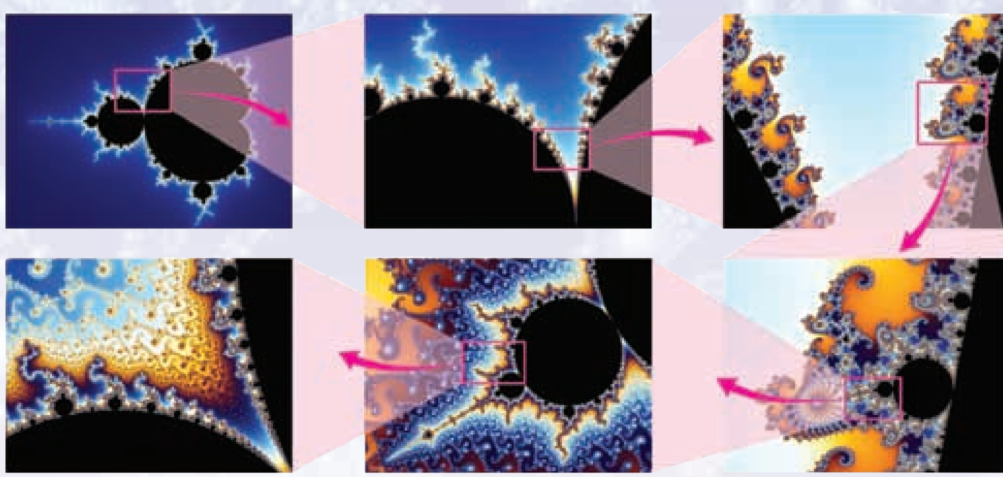
코흐의 눈송이 곡선과 같이 그 영역의 넓이는 유한하지만 그 둘레의 길이는 무한대인 도형을 프랙털(fractal)이라고 한다. 프랙털이라는 용어는 프랑스의 수학자 망델브로(Mandelbrot, B. ; 1924~2010)에 의해 고안되었다. '조각', '부분'을 뜻하는 라틴어 'fractus'에서 유래한 말로, 단순한 선이 아니면서 복잡하고 끊임없이 꺾인 것처럼 보이고, 무수히 쪼개진 면으로 이루어진 도형을 일컫는다.

망델브로는 1967년 영국의 과학 잡지 '사이언스'에 '영국을 둘러싸고 있는 해안선의 총 길이는 얼마인가?' 라는 논문을 통해 프랙털 이론을 설명하였다. 이 논문에서 그는 영국의 프랙털적인 해안선(리아스식 해안선)의 길이는 어떤 단위의 자로 재느냐에 따라 얼마든지 달라질 수 있다고 주장하였다.



프랙털은 일부분이 전체와 닮은 기하학적 구조를 지니고 있는데, 이러한 특징을 자기 유사성이라고 한다. 자연계에서도 프랙털이 자주 발견되는데, 구름, 산맥, 강줄기, 번개, 해안선, 고사리 잎, 나뭇가지, 인체 조직 등이 프랙털의 모습을 하고 있다. 오늘날 눈송이 곡선을 포함한 프랙털은 천문학, 경제학, 기상학, 그리고 영화 제작에도 활용되고 있다.

망델브로 집합으로 일컬어지는 프랙털의 일부분을 계속하여 확대하면 다음과 같이 전체의 모습이 반복적으로 나타난다.



회화에서는 원근감을 나타내기 위해 평행한 두 직선이
한없이 가까워져 한 점에서 만나는 것처럼 표현한다.

함수의 극한과 연속

| 준 | 비 | 학 | 습 |

미적분 Ⅰ 수열의 극한

1 다음 수열의 극한을 조사하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-3}{n+1}$ 2

(2) $\lim_{n\to\infty}(n^2-n)$ ∞

(3) $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+1}$ ∞

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-2^n}{3^{n+1}+2^n}$ $=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{1}{3}$

미적분 Ⅰ 수열의 극한의 성질

2 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}a_n=1$, $\lim_{n\to\infty}b_n=4$일 때, 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}(3a_n-b_n)$ $=3\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n$
$=3\times1-4=-1$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{5a_n}{a_n+2b_n}$ $=\frac{5\lim_{n\to\infty}a_n}{\lim_{n\to\infty}a_n+2\lim_{n\to\infty}b_n}$
$=\frac{5\times1}{1+2\times4}=\frac{5}{9}$

단원의 지도 목표

1. 함수의 극한

① 함수의 극한의 뜻을 알게 한다.

② 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 여러 가지 함수의 극한값을 구할 수 있게 한다.

2. 함수의 연속

① 함수의 연속의 뜻을 알게 한다.

② 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

① 함수의 극한에 대한 정의와 성질은 직관적으로 이해하게 하고, 이때 공학적 도구를 활용할 수 있다.

② 함수의 극한과 연속은 이후에 학습하게 될 미분법과 적분법의 원리를 이해하는 데 필요한 정도의 수준으로 다룬다.

교수 · 학습의 계열

선수 학습	본 단원	후속 학습
[수학 I] 다항식의 연산 인수분해 여러 가지 방정식	1. 함수의 극한 함수의 극한의 뜻 함수의 극한에 대한 성질	[미적분 I] 다항함수의 미분법 다항함수의 적분법
[수학 II] 함수 유리함수와 무리함수 수열	2. 함수의 연속 함수의 연속 연속함수의 성질	[미적분 II] 여러 가지 미분법 여러 가지 적분법
[미적분 I] 수열의 극한 급수		

단원의 차시별 지도 계획

중단원	소단원	차시	교과서(쪽)	지도 내용	용어와 기호
단원의 개관		1~4	48~49	• 단원의 개관 • 준비 학습	
1. 함수의 극한	중단원 도입		50	• 태풍의 규모와 위력	
	01 함수의 극한의 뜻		51~56	• 함수의 극한 • 함수의 좌극한과 우극한	좌극한, 우극한 $\lim_{x \to a-} f(x)$, $\lim_{x \to a+} f(x)$, $\lim_{x \to a} f(x)$
	02 함수의 극한에 대한 성질	5~8	57~62	• 함수의 극한에 대한 성질 • 여러 가지 꼴의 함수의 극한값 • 함수의 극한의 대소 관계	
	수준별 학습	9	63~65	• 중단원 확인 학습 문제	
2. 함수의 연속	중단원 도입	10~12	66	• 소득이 있는 우리나라 국민은 소득세 납부의 의무가 있다.	
	01 함수의 연속		67~71	• 함수의 연속	연속, 불연속, 구간, 닫힌 구간, 열린 구간, 반닫힌(반열린) 구간, 연속함수, $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$
	02 연속함수의 성질	13~15	72~76	• 연속함수의 성질 • 최대 · 최소 정리 • 사이값 정리	최대 · 최소 정리, 사이값 정리
	수준별 학습	16	77~79	• 중단원 확인 학습 문제	
단원 마무리		17~18	80~85	• 수행 과제 • 대단원 학습 내용 정리 • 대단원 평가 문제 • 수학 플러스	

단원의 이론적 배경

1. 함수의 극한과 연속의 정립

함수의 극한과 연속에 관한 논의는 뉴턴(Newton, I.; 1642~1727)과 라이프니츠(Leibniz, G. W.; 1646~1716)에 의하여 미적분학에 관한 연구에서 시작되었으나, 뉴턴과 라이프니츠는 극한의 개념에 대하여 깊이 연구하지 않았다. 이후 많은 수학자들이 극한의 개념에 대하여 논하였으나 극한에 대한 개념은 코시(Cauchy, A. L. ; 1789~1857)에 의하여 이루어졌다.

코시는 극한을 '변수가 차례로 택하는 값이 일정한 값에 가까워질 때, 그 차가 임의로 주어진 양보다 작아지면 그 정해진 값을 처음 변수의 극한이라고 한다.'라고 정의하였으며 연속성, 미분가능성, 정적분 등도 정의함으로써 현대 해석학의 기초를 확립하였다.

이후 바이어슈트라스(Weierstrass, K. T. W.; 1815~1897)에 의하여 극한에 대한 논법의 정의가 사용되었다. 그는 도함수가 없는 연속함수, 즉 모든 점에서 접선이 존재하지 않는 연속 곡선의 예를 발표하였다. 이것은 기하학적 직관에만 의존했던 해석학 연구에는 커다란 충격을 주었다. 이를 통해 극한, 연속성, 미분가능성의 이론은 그 이전에 가정되었던 실수 체계의 성질보다 더욱 심오한 성질에 근거하고 있다는 사실이 분명해졌다. 이에 따라 바이어슈트라스는 먼저 실수 체계를 엄밀하게 전개하고 그 다음에 해석학의 모든 기초적인 개념을 실수 체계로부터 유도하자는 계획인 해석학의 산술화(arithmetization of analysis)를 주장하였다.

해석학의 산술화에서 첫째 단계인 실수 체계의 엄밀한 전개는 19세기 말에 바이어슈트라스, 데데킨트(Dedekind, J. W. R.; 1831~1916), 칸토어(Cantor, G.; 1845~1918), 페아노(Peano, G.; 1858~1932) 등에 의해 성공적으로 실현되었다.

2. 함수의 극한

일반적으로 고등학교 교과서에서는 함수의 극한('$x=a$에서 함수 $f(x)$는 L에 수렴한다.')을 다음과 같이 정의하고 있다.

'함수 $f(x)$와 실수 a에 대하여 $x\rightarrow a$일 때, $f(x)\rightarrow L$인 실수 L이 존재할 경우 x가 a에 한없이 가까워 질 때, $f(x)$는 L에 수렴한다고 하고 L을 $x\rightarrow a$일 때의 함수 $f(x)$의 극한 또는 극한값이라고 한다.'

이 정의는 극한의 성질을 직관적으로 이해하는 데에는 매우 편리하다. 그러나 여기서 사용하고 있는 '한없이 가까워진다.'는 표현은 수학적이지 못하다. 따라서 위의 정의는 극한의 개념을 정확히 전달하지 못한다.

코시는 극한의 개념을 수학적으로 정확히 표현하기 위하여 $\lim_{x\rightarrow a}f(x)=L$를 다음과 같이 ε과 δ를 사용하여 정의($\varepsilon-\delta$ 논법)하고 있다.

"임의의 양수 ε에 대하여 적당한 양수 δ가 존재하여 $0<|x-a|<\delta$이면 $|f(x)-L|<\varepsilon$이다."

이때, L를 $x=a$에서 함수 $f(x)$의 극한(limit)이라 하고, 이를 기호 $\lim_{x\rightarrow a}f(x)=L$로 나타낸다.

위의 정의의 '$0<|x-a|<\delta$이면'에서 x는 $f(x)$의 정의역 E에 속하는 경우에만 의미가 있다. 그러므로 양수 δ에 따라 그런 x가 반드시 존재함을 보장하기 위해서 $x=a$가 E의 집적점인 경우, 즉 $x=a$의 임의의 근방에 a이외의 E의 원소가 포함되는 경우만을 생각한다. (이때, $a\notin E$일 수 있다.)

그런데 고등학교에서 다루는 함수의 정의역은 일반적으로 구간 또는 구간들의 합집합이다. 이런 경우에 정의역을 이루는 각 구간의 모든 점과 구간의 끝 점들이 정의역의 집적점이고, 이런 점에서 함수의 극한을 생각할 수 있다.

3. 함수의 극한의 유일성

> $x=a$에서 함수 $f(x)$의 극한이 존재하면 그 값은 유일하다.

증명 | 서로 다른 두 실수 L_1, L_2가 $x=a$에서 함수 $f(x)$의 극한이라 하고, $|a-b|=2\varepsilon$이라고 하자.

그러면 ε이 양수이므로 적당한 양수 δ_1과 δ_2가 존재하여 다음이 성립한다.

$0<|x-a|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-L_1|<\varepsilon$

$0<|x-a|<\delta_2 \Rightarrow |f(x)-L_2|<\varepsilon$

이제, δ_1과 δ_2 중에서 작은 수를 δ라고 하면

$0<|x-a|<\delta$일 때 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}|L_1-L_2|&=|(L_1-f(x))+(f(x)-L_2)|\\&\le|f(x)-L_1|+|f(x)-L_2|<2\varepsilon\end{aligned}$$

이는 모순이다.

따라서 함수의 극한은 유일하다.

4. 함수의 극한과 수열의 극한

> $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$이기 위한 필요충분조건은 점 a에 수렴하는 임의의 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=L$이다. (단, $a_n\ne a$)

증명 | $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$이라 하고, 수열 $\{a_n\}$이 점 a에 수렴한다고 하자. (단, $a_n\ne a$)

그러면 임의의 양수 ε에 대하여 적당한 양수 δ가 존재하여 다음이 성립한다.

$$0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon \qquad \cdots\cdots ㉠$$

그런데 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$이므로 위의 양수 δ에 대하여 적당한 자연수 N이 존재하여 다음이 성립한다.

$$n>N \Rightarrow 0<|a_n-a|<\delta \qquad \cdots\cdots ㉡$$

따라서 ㉠과 ㉡에 의하여 $n>N$이면

$|f(a_n)-L|<\varepsilon$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=L$이다.

이제, 역을 증명하기 위하여 점 a에 수렴하는 임의의 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=L$이지만, $\lim\limits_{x\to a} f(x)\ne L$라고 하자.

그러면 적당한 양수 ε이 존재하여 임의의 양수 δ에 대하여 $0<|x-a|<\delta$이지만 $|f(x)-L|\ge\varepsilon$이 성립하는 x가 있다.

이러한 x는 δ에 따라 결정되고, 각 자연수 n에 대하여 $\delta=\dfrac{1}{n}$을 택할 수 있으므로 다음과 같은 x_n이 존재한다.

$$0<|x_n-a|<\frac{1}{n} \Rightarrow |f(x_n)-L|\ge\varepsilon$$

이와 같이 수열 $\{x_n\}$은 a에 수렴하지만 $\{f(x_n)\}$은 L에 수렴하지 않으므로 이는 가정에 위배된다.

따라서 위의 함수의 극한과 수열의 극한 사이의 관계가 성립한다.

이 정리에 의하여 함수의 극한에 관한 성질은 모두 수열의 극한에 관한 성질을 이용하여 증명할 수 있다.

5. 함수의 연속성

일반적으로 고등학교 교과서에서 '함수 $f(x)$가 실수 $x=a$에서 연속이다.'를 다음과 같이 정의하고 있다.

① 함숫값 $f(a)$가 존재한다.

② 극한값 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$가 존재한다.

③ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

이것을 $\varepsilon-\delta$논법으로 나타내면 다음과 같다.

"임의의 양수 ε에 대하여 적당한 양수 δ가 존재하여 $|x-a|<\delta$이면 $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$이다."

위의 정의에 따라 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이기 위해서 반드시 $f(a)$가 정의되어야 한다.

그리고 $x=a$가 정의역의 집적점일 때, $f(x)$가 $x=a$에서 연속이기 위한 필요충분조건은 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$임을 알 수 있다.

차시별 교수 · 학습 과정안 (예시)

대단원		Ⅱ. 함수의 극한과 연속	쪽수	교과서 48~53쪽
소단원		1. 함수의 극한 01 함수의 극한의 뜻	차시	1/18
학습 목표		**함수의 극한의 뜻을 알고, 함수의 수렴을 이해한다.**		
단계	학습 과정	교수 · 학습 활동		교수 · 학습상의 유의점
도입	선수 학습 확인 동기 유발 학습 목표 제시	◯ 준비 학습을 이용하여 이번 단원의 학습에 필요한 기초 개념을 간단히 확인, 점검한다. ◯ 중단원 도입 글을 읽고 단원 과제를 발문하여 이번 중단원을 학습하면서 이 과제를 해결할 수 있음을 암시한다. ◯ 이번 차시의 학습 목표를 제시한다. • 함수의 극한의 뜻을 알고, 함수의 수렴을 이해한다.		모둠 학습을 위한 소집단을 사전에 편성한다.
전개	탐구 활동 개념 학습 문제 해결	◯ 생각 열기를 읽고, 탐구 활동을 모둠별로 해결하도록 한다. ◯ 탐구 활동 결과를 발표하게 하고, 보충 설명을 한다. ◯ 학습 내용 설명 **함수의 수렴** 일반적으로 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 α에 수렴한다고 한다. **함수의 극한값** 이때 α를 x의 값이 a에 한없이 가까워질 때의 함수 $f(x)$의 극한값 또는 극한이라고 하며, 이것을 기호로 $\lim_{x \to a} f(x)=\alpha$ 또는 $x \to a$일 때 $f(x) \to \alpha$ 와 같이 나타낸다. ◯ 예제 01을 설명한다. ◯ 문제 1번을 풀게 한다. 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다.		
정리	학습 내용 정리 차시 예고	◯ 본시의 학습 내용을 정리한다. ◯ 다음 차시를 예고한다. • 함수의 발산을 이해한다.(1)		

차시별 교수 · 학습 과정안 (예시)

대단원	Ⅱ. 함수의 극한과 연속	쪽수	교과서 53쪽
소단원	1. 함수의 극한　01 함수의 극한의 뜻	차시	2/18
학습 목표	함수의 발산을 이해한다.(1)		

단계	학습 과정	교수 · 학습 활동	교수 · 학습상의 유의점
도입	선수 학습 확인 동기 유발 학습 목표 제시	◎ 이전 차시에 학습한 내용을 간단히 확인, 점검한다. ◎ 학습 동기 유발을 위한 발문을 한다. 예 함수 $f(x)=\frac{1}{x^2}$의 그래프에서 x의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 어떻게 될지 말하여 보자. ◎ 이번 차시의 학습 목표를 제시한다. • 함수의 발산을 이해한다.(1)	
전개	개념 학습 문제 해결	◎ 학습 내용 설명 **함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에 한없이 가까워질 때, 함수 $f(x)$가 수렴하지 않는 경우** (1) 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 한없이 커지면 함수 $f(x)$는 양의 무한대로 발산한다고 하며, 이것을 기호로 $\lim_{x \to a} f(x)=\infty$ 또는 $x \to a$일 때 $f(x) \to \infty$ 와 같이 나타낸다. (2) 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 함수 $f(x)$는 음의 무한대로 발산한다고 하며, 이것을 기호로 $\lim_{x \to a} f(x)=-\infty$ 또는 $x \to a$일 때 $f(x) \to -\infty$ 와 같이 나타낸다. ◎ 문제 2번을 풀게 한다. 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다.	∞는 아주 큰 수가 아니라 무한히 커지는 상태를 나타냄을 강조한다.
정리	학습 내용 정리 차시 예고	◎ 본시의 학습 내용을 정리한다. ◎ 다음 차시를 예고한다. • 함수의 발산을 이해한다.(2)	

1 함수의 극한

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 함수의 극한의 뜻을 알게 한다.

② 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고 여러 가지 함수의 극한값을 구할 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
01 함수의 극한의 뜻	함수의 극한
	함수의 좌극한과 우극한
02 함수의 극한에 대한 성질	함수의 극한에 대한 성질
	여러 가지 꼴의 함수의 극한값
	함수의 극한의 대소 관계
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

교과서 50 쪽

1 함수의 극한

태풍의 규모와 위력

태풍은 보통 반지름의 길이가 500 km정도로 한반도 전체를 덮고도 남을 만큼 크며, 그 중심에는 태풍의 눈이 있다. 태풍은 태풍의 눈을 중심으로 시계 반대 방향으로 회전하며 북상하기 때문에 태풍의 오른쪽 반원은 보다 강력한 위력을 가지고 있다.

태풍은 지구의 위도에 따라 태양으로부터 받는 열량의 차이로 인한 불균형을 해소하기 위하여 발생하는데, 저위도 지방의 따뜻한 공기가 바다로부터 수증기를 공급받으면서 강한 바람과 많은 비를 동반하여 매년 여름과 초가을에 걸쳐 우리나라에 상륙한다.

우리나라에 상륙한 태풍은 산사태, 하천 범람 등을 일으키고, 심지어 큰 인명 피해를 일으키기도 한다. 따라서 기상청은 태풍에 보다 안전하게 대비하기 위하여 태풍이 발생한 순간부터 태풍에 대한 정보 수집에 촉각을 곤두세운다.

단원 과제 이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 62쪽

태풍이 사라질 때까지 태풍의 눈의 경로를 예측할 수 있을까?

들어가면서 자연 현상이나 사회 현상 중에는 시간의 흐름에 따라 그 변화되는 과정을 예측할 수 있는 것도 있고, 예측할 수 없는 것도 있다. 또 어떤 단계에 이르면 상태가 급변하여 예측이 불가능한 현상도 있으며, 어떤 안정한 상태로 접근하여 예측이 가능한 현상도 있다. 이러한 여러 가지 현상들은 극한이라는 수학적 도구를 이용하여 설명할 수 있다.

이 단원에서는 수열의 극한에 대한 이해를 바탕으로 함수의 수렴과 발산 개념을 이해하고, 함수의 극한값을 구한다. 또 함수의 극한에 대한 성질과 함수의 극한의 대소 관계를 이용하여 여러 가지 함수의 극한값을 구하고, 실생활에서 접할 수 있는 문제를 해결할 수 있게 한다.

성취 기준과 성취 수준

성취 기준		성취 수준
1. 함수의 극한의 뜻을 안다.	상	좌극한과 우극한을 이용하여 극한을 판별할 수 있다.
	중	$\lim\limits_{x \to 2} x$, $\lim\limits_{x \to \infty} x^2$, $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x}$ 등과 같은 간단한 함수의 극한을 판별할 수 있다.
	하	함수의 그래프를 보고 간단한 함수의 극한을 판별할 수 있다.
2. 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 여러 가지 함수의 극한값을 구할 수 있다.	상	함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 여러 가지 함수의 극한값을 구할 수 있다.
	중	함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 분수함수, 무리함수의 극한값을 구할 수 있다.
	하	함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 다항함수의 극한값을 구할 수 있다.

01 함수의 극한의 뜻

● 함수의 극한의 뜻을 안다.

함수의 극한이란 무엇인가?

생각 열기

탐구 활동

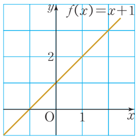
함수 $f(x)=x+1$에서 x의 값이 1에 가까워질 때, 다음 물음에 답하여 보자.

1. 다음 표를 완성하여 보자.

x	$\cdots$	0.9	0.99	0.999	⇨	1	⇦	1.001	1.01	1.1	$\cdots$
$f(x)$	$\cdots$				⇨	2	⇦				$\cdots$

2. **1**의 표에서 x의 값이 1에 가까워질 때, $f(x)$의 값은 어떤 수에 가까워진다고 할 수 있는지 말하여 보자.

3. 오른쪽 좌표평면 위의 그래프를 이용하여 **2**의 결과를 확인하여 보자.

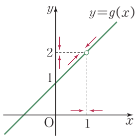


위의 함수 $f(x)=x+1$에서 x의 값이 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.

한편 함수 $g(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$은 $x=1$일 때 분모가 0이 되어 그 함숫값이 정의되지 않는다. 그러나 $x\neq1$이면

$$g(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$$

이므로 x의 값이 1이 아니면서 1에 한없이 가까워지면 $g(x)$의 값은 오른쪽 그림과 같이 2에 한없이 가까워짐을 알 수 있다.



01 함수의 극한의 뜻

소단원 지도 목표

① 함수의 수렴 및 함수의 극한의 뜻을 알게 한다.

② 함수의 발산에 대하여 알게 한다.

③ $x\to\infty$이거나 $x\to-\infty$일 때 함수 $f(x)$의 극한에 대하여 알게 한다.

④ 우극한과 좌극한의 뜻을 알게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 함수의 극한에 관한 정의는 수열의 극한과 관련지어 이해하게 한다.

2. 함수의 수렴과 발산은 그래프를 이용하여 직관적으로 이해할 수 있도록 지도한다.

3. $x\to a$일 때 $x\neq a$임에 유의하도록 지도한다.

4. 일반적으로 $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$가 성립하는 것은 아니며, 함숫값 $f(a)$가 정의되지 않아도 극한값 $\lim_{x\to a}f(x)$는 존재할 수 있음을 알게 한다.

5. 우극한과 좌극한은 극한값의 존재 여부를 확인하는 수준에서 지도하고 두 값이 반드시 일치하는 것은 아님을 알게 한다.

새로 나온 용어와 기호

- 좌극한(左極限, left-handed limit)
- 우극한(右極限, right-handed limit)
- $\lim_{x\to a-}f(x)$, $\lim_{x\to a+}f(x)$, $\lim_{x\to a}f(x)$

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 함수 $f(x)=x+1$에서 x의 값이 1과 다른 값을 가지면서 1에 한없이 가까워질 때, 함숫값의 변화를 살펴보며 극한의 개념을 이해하기 위한 활동이다.

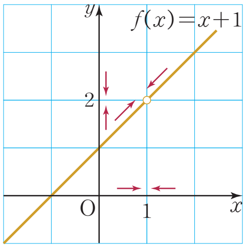
1.

x	$\cdots$	0.9	0.99	0.999	⇨	1	⇦	1.001	1.01	1.1	$\cdots$
$f(x)$	$\cdots$	**1.9**	**1.99**	**1.999**	⇨	2	⇦	**2.001**	**2.01**	**2.1**	$\cdots$

2. **$f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워진다고 할 수 있다.**

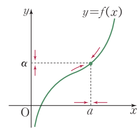
주의 | 함수 $f(x)=x+1$에서 x의 값이 1과 다른 값을 가지면서 1에 한없이 가까워질 때, 주어진 함수의 값이 한없이 가까워지는 일정한 값을 직관적으로 확인할 수 있도록 한다.

3. 오른쪽 그래프에서도 알 수 있듯이 x의 값이 1보다 크면서 1에 한없이 가까워질 때나 1보다 작으면서 1에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값은 모두 2에 한없이 가까워진다.



교과서 52 쪽

일반적으로 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 α에 수렴한다고 한다.

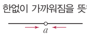


이때 α를 x의 값이 a에 한없이 가까워질 때의 함수 $f(x)$의 극한값 또는 극한이라고 하며, 이것을 기호로

$$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha \quad \text{또는} \quad x \to a\text{일 때 } f(x) \to \alpha$$

와 같이 나타낸다.

● $x \to a$는 $x \neq a$이면서 x가 a에 한없이 가까워짐을 뜻한다.



이를테면 앞의 두 함수 $f(x)=x+1$, $g(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$은 x의 값이 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$와 $g(x)$의 값은 각각 2에 한없이 가까워지므로

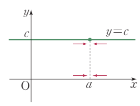
$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}(x+1)=2,\ \lim_{x\to 1} g(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$$

와 같이 나타낼 수 있다.

● 함숫값이 정의되지 않는 점에서도 극한값은 존재할 수 있다.

특히 상수함수 $f(x)=c$ (c는 상수)의 경우에는 오른쪽 그림과 같이 모든 x의 값에 대하여 함숫값이 항상 c이므로 a의 값에 관계없이 다음이 성립한다.

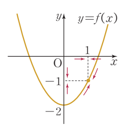
$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} c=c$$



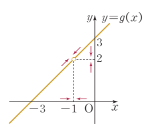
예제 01 다음 극한값을 그래프를 이용하여 구하여라.

(1) $\lim_{x\to 1}(x^2-2)$ (2) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+4x+3}{x+1}$

풀이 (1) 함수 $f(x)=x^2-2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
x의 값이 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 -1에 한없이 가까워지므로
$\lim_{x\to 1}(x^2-2)=-1$



(2) $x\neq -1$일 때
$g(x)=\frac{x^2+4x+3}{x+1}=\frac{(x+1)(x+3)}{x+1}=x+3$
이므로 함수 $g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
x의 값이 -1에 한없이 가까워질 때, $g(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로
$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+4x+3}{x+1}=\lim_{x\to -1}(x+3)=2$



답 (1) -1 (2) 2

교과서 53 쪽

문제 1 다음 극한값을 그래프를 이용하여 구하여라.

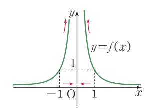
(1) $\lim_{x\to 2}(2x-1)$ (2) $\lim_{x\to 1}(x^2+3x)$

(3) $\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x+3}$ (4) $\lim_{x\to 0} 5$

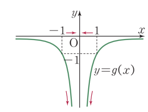
함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에 한없이 가까워질 때, 함수 $f(x)$가 수렴하지 않는 경우에 대하여 알아보자.

〈그림 1〉과 같이 함수 $f(x)=\frac{1}{x^2}$의 그래프에서 x의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커짐을 알 수 있다.

또 〈그림 2〉와 같이 함수 $g(x)=-\frac{1}{x^2}$의 그래프에서 x의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $g(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커짐을 알 수 있다.



〈그림 1〉



〈그림 2〉

일반적으로 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 한없이 커지면 함수 $f(x)$는 양의 무한대로 발산한다고 하며, 이것을 기호로

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty \quad \text{또는} \quad x \to a\text{일 때 } f(x) \to \infty$$

와 같이 나타낸다.

● ∞는 아주 큰 수가 아니라 무한히 커지는 상태를 나타낸다.

또 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 함수 $f(x)$는 음의 무한대로 발산한다고 하며, 이것을 기호로

$$\lim_{x\to a} f(x)=-\infty \quad \text{또는} \quad x \to a\text{일 때 } f(x) \to -\infty$$

와 같이 나타낸다.

● $-\infty$는 아주 작은 값이 아니라 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지는 상태를 나타낸다.

보기 (1) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$ (2) $\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$

문제 2 다음 극한을 그래프를 이용하여 조사하여라.

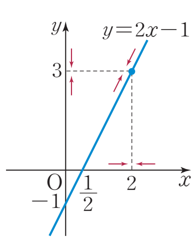
(1) $\lim_{x\to 2}\frac{1}{|x-2|}$ (2) $\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x-3)^2}$ (3) $\lim_{x\to -1}\left\{2-\frac{1}{(x+1)^2}\right\}$

1

목표| 함수의 그래프를 이용하여 극한값을 구할 수 있게 한다.

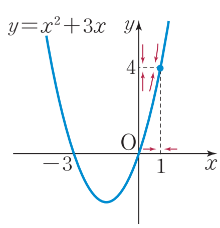
풀이|

(1)



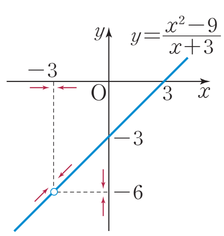
$\lim_{x\to 2}(2x-1)=3$

(2)



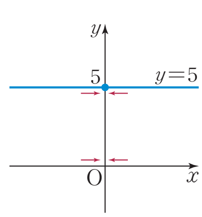
$\lim_{x\to 1}(x^2+3x)=4$

(3)



$\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x+3}=-6$

(4)



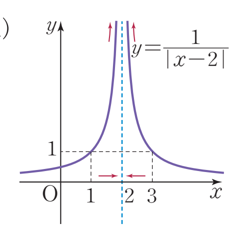
$\lim_{x\to 0} 5=5$

2

목표| 함수의 그래프를 이용하여 극한을 조사할 수 있게 한다.

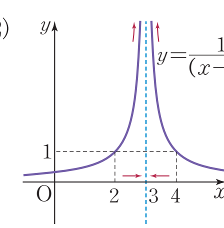
풀이|

(1)



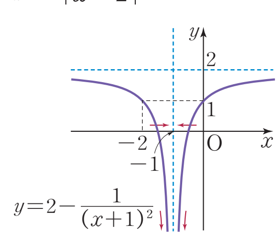
$\lim_{x\to 2}\frac{1}{|x-2|}=\infty$

(2)



$\lim_{x\to 3}\frac{1}{(x-3)^2}=\infty$

(3)

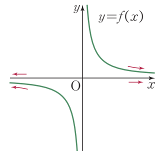


$\lim_{x\to -1}\left\{2-\frac{1}{(x+1)^2}\right\}=-\infty$

교과서 54 쪽

함수 $f(x)$에서 x의 값이 한없이 커지거나 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때의 함수의 극한을 생각하여 보자.

오른쪽 그림의 함수 $f(x)=\frac{1}{x}$의 그래프에서 x의 값이 한없이 커지면 $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지고, x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때에도 $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워진다.



❶ 일반적으로 함수 $f(x)$에서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 수렴한다는 것을 기호로

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\alpha \quad \text{또는} \quad x \to \infty\text{일 때 } f(x) \to \alpha$$

와 같이 나타낸다.

또 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 β에 수렴한다는 것을 기호로

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\beta \quad \text{또는} \quad x \to -\infty\text{일 때 } f(x) \to \beta$$

와 같이 나타낸다.

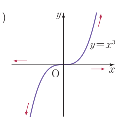
한편 x의 값이 한없이 커지거나, 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값이 양의 무한대 또는 음의 무한대로 발산하면 이것을 기호로

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty,\ \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

와 같이 나타낸다.

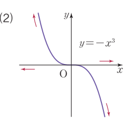
보기 (1)



$\lim_{x\to\infty} x^3=\infty$

$\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

(2)



$\lim_{x\to\infty} (-x^3)=-\infty$

$\lim_{x\to-\infty} (-x^3)=\infty$

문제 3 다음 극한을 그래프를 이용하여 조사하여라.

(1) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+3}$　　(2) $\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{5}{x}-2\right)$

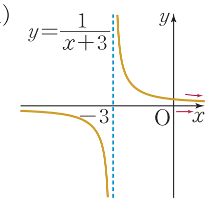
(3) $\lim_{x\to\infty} x^2$　　(4) $\lim_{x\to-\infty} (3x-2)$

3

목표| 함수의 그래프를 이용하여 극한을 조사할 수 있게 한다.

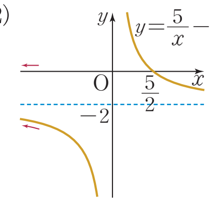
풀이|

(1)



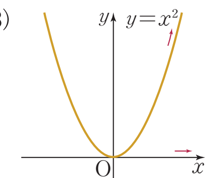
$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x+3}=\mathbf{0}$

(2)



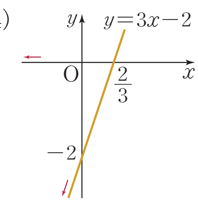
$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{5}{x}-2\right)=\mathbf{-2}$

(3)



$\lim_{x\to\infty} x^2=\infty$

(4)



$\lim_{x\to-\infty} (3x-2)=-\infty$

본문 해설

❶ $x\to\infty$일 때, 함수 $f(x)$의 극한은 수열의 극한과 마찬가지로 다음과 같다.

(ⅰ) $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$: x가 양의 값으로 한없이 커질 때, $f(x)$는 일정한 값 L에 한없이 가까워진다.

(ⅱ) $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$: x가 양의 값으로 한없이 커질 때, $f(x)$는 양의 값으로 한없이 커진다.

(ⅲ) $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$: x가 양의 값으로 한없이 커질 때, $f(x)$는 음의 값으로 절댓값이 한없이 커진다.

한편, $x \to -\infty$일 때, 즉 x가 음의 값으로 절댓값이 한없이 커질 때도 함수 $f(x)$의 극한은 위와 마찬가지로 아래와 같이 생각한다.

(ⅰ) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$

(ⅱ) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$

(ⅲ) $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

지/도/자/료

1. 수열의 극한과 함수의 극한

수열은 정의역이 자연수 전체의 집합의 부분집합이고, 공역이 실수 전체의 집합인 함수이므로 수열의 극한 $\lim_{n\to\infty} a_n$을 생각할 때에는 변수 n의 값이 자연수로 1씩 증가하면서 한없이 커지는 경우에 대해서만 생각하였다.

그러나 함수의 극한에서는 함수 $f(x)$의 정의역과 공역을 모두 실수 전체의 집합으로 생각할 수 있으므로 변수 x의 값이 실숫값을 가지면서 한없이 커지는 경우의 극한 $\lim_{x\to\infty} f(x)$뿐만 아니라 한없이 작아지는 경우의 극한 $\lim_{x\to-\infty} f(x)$와 한없이 일정한 값에 가까워지는 경우의 극한 $\lim_{x\to a} f(x)$에 대해서도 생각할 수 있다.

2. $x \to a$와 $f(x) \to L$의 차이점

'$x \to a$'는 변수 x가 실수 a와 다른 값을 가지면서 a에 한없이 가까워지는 것으로 $x\neq a$이다. 그러나 '$f(x) \to L$'은 함숫값 $f(x)$가 취하는 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지는 것으로 이때에는 $f(x)$가 L과 일치할 수도 있다. 따라서 $x \to a$와 $f(x) \to L$에서 모두 같은 기호를 사용하지만 양쪽에서의 의미는 다르다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 함수 $f(x)$에서 x의 값이 20보다 작으면서 20에 한없이 가까워질 때의 극한값과 x의 값이 20보다 크면서 20에 한없이 가까워질 때의 극한값의 변화를 살펴보고 좌극한과 우극한의 개념을 이해하기 위한 것이다.

1. x의 값이 20보다 작으면서 20에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값은 **1에 한없이 가까워진다.**

2. x의 값이 20보다 크면서 20에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값은 **0에 한없이 가까워진다.**

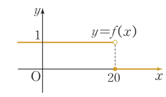
3. 두 경우 극한값이 **서로 다름을 알 수 있다.**

교과서 55 쪽

함수의 좌극한과 우극한이란 무엇인가?

탐구 활동 민호는 실내 온도가 20 ℃ 미만이면 보일러가 자동으로 켜지고, 20 ℃ 이상이면 보일러가 자동으로 꺼지도록 설정하였다. 실내 온도가 x ℃일 때, 함수 $f(x)$를 다음과 같이 정의하고, 그 그래프를 나타내었다. 물음에 답하여 보자.

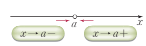
$$f(x)=\begin{cases} 1 & (x<20) \\ 0 & (x\geq 20) \end{cases}$$



1. x의 값이 19.9, 19.99, 19.999, ⋯와 같이 20보다 작으면서 20에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 어떤 값에 한없이 가까워지는지 말하여 보자.

2. x의 값이 20.1, 20.01, 20.001, ⋯과 같이 20보다 크면서 20에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 어떤 값에 한없이 가까워지는지 말하여 보자.

3. **1**, **2**의 결과를 비교하여 보자.



x의 값이 a보다 작으면서 a에 한없이 가까워지는 것을 기호로 $x \to a-$와 같이 나타내고, x의 값이 a보다 크면서 a에 한없이 가까워지는 것을 기호로 $x \to a+$와 같이 나타낸다.

❶ 일반적으로 x의 값이 a보다 작으면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 α를 $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 **좌극한**이라 하고, 기호로

$$\lim_{x\to a-} f(x)=\alpha \quad \text{또는} \quad x \to a-\text{일 때 } f(x) \to \alpha$$

와 같이 나타낸다.

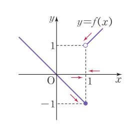
또 x의 값이 a보다 큰 값을 가지면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 β에 한없이 가까워지면 β를 $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 **우극한**이라 하고, 기호로

$$\lim_{x\to a+} f(x)=\beta \quad \text{또는} \quad x \to a+\text{일 때 } f(x) \to \beta$$

와 같이 나타낸다.

보기 함수 $f(x)=\begin{cases} -x & (x\leq 1) \\ x & (x>1) \end{cases}$에 대하여

$\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=1$



본문 해설

❶ 수열의 극한에서와는 달리, 실수 x가 어떤 수 a의 작은 쪽 또는 큰 쪽에서만 그 수에 한없이 가까워질 때, 주어진 함수의 극한이 수렴하는 값을 그래프를 통해 직관적으로 확인할 수 있도록 한다.

우극한과 좌극한은 실수 x가 어떤 수 a에 가까워지는 방향을 나타내고 있는 것이며, 함수의 우극한과 좌극한이 일반적으로 일치하는 것은 아니다.

이를테면, 함수

$$f(x)=\begin{cases} -1 & (x<0) \\ 1 & (x\geq 0) \end{cases}\text{에서}$$

$\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to 0-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0+} f(x)$이다.

우극한 또는 좌극한이 존재하지 않거나, 우극한과 좌극한이 존재하지만 서로 다른 값을 가질 때는 극한값이 존재하지 않는다.

지/도/자/료

1. 함수의 극한 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$의 $\varepsilon-\delta$ 정의

임의의 양수 $\varepsilon>0$에 대하여 이에 대응하는 적당한 양수 $\delta>0$가 존재하여 $0<|x-a|<\delta$이면 $|f(x)-L|<\varepsilon$이 성립한다.

2. 우극한의 $\varepsilon-\delta$ 정의

임의의 양수 $\varepsilon>0$에 대하여 이에 대응하는 적당한 양수 $\delta>0$가 존재하여 $a<x<a+\delta$일 때, $|f(x)-\alpha|<\varepsilon$이면 α는 함수 $f(x)$의 $x \to a+$일 때의 우극한이다.

이때, 우극한을 $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$와 같이 나타내기도 한다.

3. 좌극한의 $\varepsilon-\delta$ 정의

임의의 양수 $\varepsilon>0$에 대하여 이에 대응하는 적당한 양수 $\delta>0$가 존재하여 $a-\delta<x<a$일 때, $|f(x)-\beta|<\varepsilon$이면 β는 함수 $f(x)$의 $x \to a-$일 때의 좌극한이다.

이때, 좌극한을 $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$와 같이 나타내기도 한다.

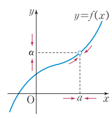
교과서 56 쪽

문제 4 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & (x>1) \\ x+1 & (x\le 1) \end{cases}$$

일 때, 다음 극한값을 그래프를 이용하여 구하여라.

(1) $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)$　　(2) $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)$



함수 $f(x)$에 대하여 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\alpha$이면 $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 좌극한과 우극한이 존재하고 그 값은 α로 일치한다. 또 $x=a$에서 좌극한과 우극한이 모두 존재하고 그 값이 같으면 극한값 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$가 존재한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

함수의 극한

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\alpha \iff \lim\limits_{x\to a-} f(x)=\alpha$이고 $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=\alpha$

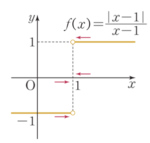
예제 02 함수 $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$에 대하여 극한 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$를 그래프를 이용하여 조사하여라.

풀이 $f(x)=\begin{cases} -1 & (x<1) \\ 1 & (x>1) \end{cases}$

❶ 이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=1$에서

$\lim\limits_{x\to 1-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 1+} f(x)$이므로 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$의 값은 존재하지 않는다.



답 존재하지 않는다.

문제 5 다음 극한을 그래프를 이용하여 조사하여라.

(1) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-3x}{x-3}$　　(2) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^2+x-1}{|x+1|}$

사고력 기르기

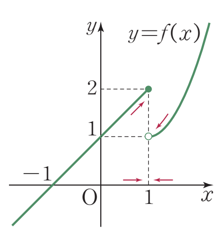
▶추론
의사소통
문제 해결

두 극한 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$와 $\lim\limits_{x\to 0+} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$이 존재하고, 그 값이 같은 함수 $f(x)$를 찾아보자.

4

목표| 함수의 그래프를 이용하여 좌극한과 우극한을 각각 구할 수 있게 한다.

풀이| 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(1) $\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=\mathbf{2}$

(2) $\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\mathbf{1}$

본문 해설

❶ 변수 x의 접근 방향에 따라 정해지는 두 수렴하는 값이 서로 다를 때, 주어진 값에서의 함수의 극한은 존재하지 않음을 이해할 수 있도록 한다.

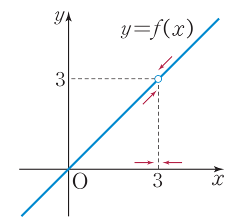
좌극한과 우극한이 같지 않은 경우가 있는 분수함수, 절댓값을 포함한 함수, 가우스 함수, 정의역이 구분되어져 있는 함수 등은 좌극한과 우극한을 각각 구하여 그 값이 같은지 확인해야 한다.

5

목표| 함수의 그래프를 이용하여 극한을 조사할 수 있게 한다.

풀이| (1) $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x-3}$라고 하면

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$\lim\limits_{x\to 3-} \dfrac{x^2-3x}{x-3}=3$,

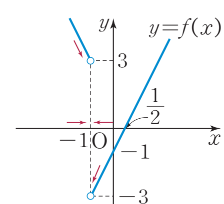
$\lim\limits_{x\to 3+} \dfrac{x^2-3x}{x-3}=3$

에서 $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-3x}{x-3}=\mathbf{3}$

(2) $f(x)=\dfrac{2x^2+x-1}{|x+1|}$이라 하면

$f(x)=\begin{cases} -2x+1 & (x<-1) \\ 2x-1 & (x>-1) \end{cases}$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$\lim\limits_{x\to -1-} f(x)=3$,

$\lim\limits_{x\to -1+} f(x)=-3$

에서 $\lim\limits_{x\to -1-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to -1+} f(x)$이므로

$\lim\limits_{x\to -1} f(x)$**의 값은 존재하지 않는다.**

사고력 기르기 추론

출제 의도| 두 극한 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$와 $\lim\limits_{x\to 0+} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$이 존재할 때, 두 극한값이 같음을 예를 들어 설명할 수 있게 한다.

풀이| $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^3+1}$에 대하여

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{x^3}}{1+\dfrac{1}{x^3}}=1,$$

$$\lim_{x\to 0+} f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0+}\dfrac{\dfrac{1}{x^3}-1}{\dfrac{1}{x^3}+1}=\lim_{x\to 0+}\dfrac{1-x^3}{1+x^3}=1\ (x\neq 0)$$

이므로 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+} f\left(\dfrac{1}{x}\right)=1$

02 함수의 극한에 대한 성질

소단원 지도 목표

① 함수의 극한에 대한 성질을 이해할 수 있게 한다.
② 함수의 극한에 대한 성질을 활용하여 여러 가지 함수의 극한값을 구할 수 있게 한다.
③ 분수함수의 극한에 대한 성질을 활용하여 함수의 극한과 관련된 문제를 해결할 수 있게 한다.
④ 함수의 극한의 대소 관계를 이해할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 함수의 극한에 대한 성질은 논리적으로 엄밀하게 증명하지 않고, 수열의 극한과 관련지어 이해하게 한다.

2. 극한값의 계산에서는 함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 구할 수 있는 간단한 함수만 다루어 준다.

3. 함수의 극한에 대한 성질은 수열의 극한과 마찬가지로 $\lim_{x \to a} f(x)$, $\lim_{x \to a} g(x)$가 각각 존재할 때에 한해서 성립함에 주의하게 한다.

4. 함수의 극한에 대한 성질은 $x \to a+$, $x \to a-$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$ 에서도 성립함을 알게 한다.

5. $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty \times 0$, $\infty - \infty$ 꼴의 극한값을 구할 때에는 식을 적절히 변형하여 극한값을 구할 수 있도록 지도한다.

6. $f(x) < g(x)$이지만 $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x)$가 되는 경우가 있음에 유의하여 지도한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 구체적인 함수의 예를 통해 수열에서 성립하는 수열의 극한에 대한 성질이 함수의 극한에서도 성립함을 발견하는 토대가 되도록 하기 위한 것이다.

교과서 57 쪽

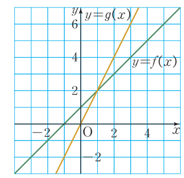
02 함수의 극한에 대한 성질

● 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 여러 가지 함수의 극한값을 구할 수 있다.

함수의 극한에 대한 성질은 어떠한가?

탐구 활동

오른쪽 그림은 두 함수 $f(x)=x+1$, $g(x)=2x$의 그래프를 좌표평면 위에 나타낸 것이다. 다음 물음에 답하여 보자.



1. 함수 $f(x)+g(x)$의 그래프를 오른쪽 좌표평면 위에 나타내어 보자.

2. $\lim_{x \to 2} \{f(x)+g(x)\}$의 값을 그래프를 이용하여 구하여 보자.

3. $\lim_{x \to 2} f(x) + \lim_{x \to 2} g(x)$의 값을 그래프를 이용하여 구하여 보자.

4. 2, 3의 결과를 비교하여 보자.

탐구 활동에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$\lim_{x \to 2} \{f(x)+g(x)\} = \lim_{x \to 2} f(x) + \lim_{x \to 2} g(x)$$

가 성립함을 알 수 있다.

일반적으로 함수의 극한에서는 다음과 같은 성질이 성립한다.

● 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고 $\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \to \infty} b_n = \beta$일 때,
(1) $\lim_{n \to \infty} ca_n = c\alpha$ (단, c는 상수)
(2) $\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$
(3) $\lim_{n \to \infty} (a_n - b_n) = \alpha - \beta$
(4) $\lim_{n \to \infty} a_n b_n = \alpha\beta$
(5) $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$ (단, $b_n \neq 0$, $\beta \neq 0$)

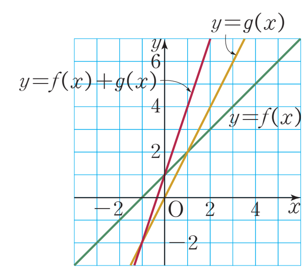
함수의 극한에 대한 성질

$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \to a} g(x) = \beta$ (α, β는 실수)일 때

(1) $\lim_{x \to a} cf(x) = c \lim_{x \to a} f(x) = c\alpha$ (단, c는 상수)
(2) $\lim_{x \to a} \{f(x)+g(x)\} = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = \alpha + \beta$
(3) $\lim_{x \to a} \{f(x)-g(x)\} = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = \alpha - \beta$
(4) $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = \alpha\beta$
(5) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$ (단, $\beta \neq 0$)

참고 함수의 극한에 대한 성질은 $x \to a$를 $x \to a+$, $x \to a-$, $x \to \infty$, $x \to -\infty$로 바꾸어도 성립한다.

1. $f(x)+g(x)$
$=(x+1)+2x$
$=3x+1$
이므로 $f(x)+g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



2. 그림에서
$\lim_{x \to 2} \{f(x)+g(x)\} = f(2)+g(2) = \mathbf{7}$

3. 그림에서
$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = 3$, $\lim_{x \to 2} g(x) = g(2) = 4$
이므로 $\lim_{x \to 2} f(x) + \lim_{x \to 2} g(x) = 3+4 = \mathbf{7}$

4. 2와 3의 결과는 서로 같다.

교과서 58 쪽

함수의 극한에 대한 성질을 이용하면 복잡한 함수의 극한을 그래프를 이용하지 않고도 구할 수 있다.

보기 (1) $\lim_{x\to2}(3x^2+x)=\lim_{x\to2}3x^2+\lim_{x\to2}x=3\lim_{x\to2}x^2+\lim_{x\to2}x$

$=3\lim_{x\to2}x\cdot\lim_{x\to2}x+\lim_{x\to2}x=3\cdot2^2+2=14$

(2) $\lim_{x\to-1}\dfrac{x-2}{x^2+1}=\dfrac{\lim_{x\to-1}(x-2)}{\lim_{x\to-1}(x^2+1)}=\dfrac{\lim_{x\to-1}x-\lim_{x\to-1}2}{\lim_{x\to-1}x^2+\lim_{x\to-1}1}=\dfrac{-1-2}{(-1)^2+1}=-\dfrac{3}{2}$

문제 1 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to3}(x^2-4x+7)$ (2) $\lim_{x\to2}(x+1)(x^2-2)$

(3) $\lim_{x\to-2}\dfrac{x^2+5x+3}{x+3}$ (4) $\lim_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{3}{x+1}\right)$

❶ $x\to a$ 또는 $x\to\infty$일 때, 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $f(x)g(x)$, $f(x)-g(x)$의 극한값은 인수분해 또는 유리화를 이용하여 식을 변형하거나, 수열의 극한과 같은 방법으로 식을 변형하여 구한다.

예제 01 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to3}\dfrac{x^2-x-6}{x-3}$ (2) $\lim_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

(1) $\dfrac{0}{0}$ 꼴이 나오지 않도록 분자와 분모를 인수분해하여 약분한다.

(2) 근호가 있는 부분을 유리화한다.

풀이 (1) 분자를 인수분해하여 약분하면

$$\lim_{x\to3}\frac{x^2-x-6}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x+2)(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to3}(x+2)=5$$

(2) 분자를 유리화하면

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{4}$$

답 (1) 5 (2) $\dfrac{1}{4}$

1

목표| 함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 복잡한 함수의 극한을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\lim_{x\to3}(x^2-4x+7)=\lim_{x\to3}x^2-4\lim_{x\to3}x+\lim_{x\to3}7$

$=3^2-4\cdot3+7=\mathbf{4}$

(2) $\lim_{x\to2}(x+1)(x^2-2)=\lim_{x\to2}(x+1)\cdot\lim_{x\to2}(x^2-2)$

$=3\cdot2=\mathbf{6}$

(3) $\lim_{x\to-2}\dfrac{x^2+5x+3}{x+3}=\dfrac{\lim_{x\to-2}(x^2+5x+3)}{\lim_{x\to-2}(x+3)}$

$=\dfrac{(-2)^2+5(-2)+3}{-2+3}=\mathbf{-3}$

(4) $\lim_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{3}{x+1}\right)=\lim_{x\to1}\dfrac{1}{x-3}-3\lim_{x\to1}\dfrac{1}{x+1}$

$=\dfrac{1}{1-3}-\dfrac{3}{1+1}=\mathbf{-2}$

본문 해설

❶ (1) 다항함수의 극한

$x\to a$일 때, 상수함수 $y=c$와 일차함수 $y=x$의 극한값 및 함수의 극한에 대한 성질을 이용하면 모든 다항함수의 극한값을 구할 수 있다. 또, $x=a$에서 분모가 0이 아닌 분수함수의 극한값도 구할 수 있다. 두 개 이상의 함수의 사칙계산으로 이루어져 있는 함수의 극한값은 함수의 극한에 대한 성질 (2)~(5)를 이용하게 된다.

(2) 부정형(indeterminate form)의 극한

$\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$,

$\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}$, $\lim_{x\to\infty}\{f(x)-g(x)\}$,

$\lim_{x\to a}f(x)g(x)$, $\lim_{x\to\infty}f(x)g(x)$

에 함수의 극한에 대한 성질을 적용했을 때,

$\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, $0\times\infty$

등의 꼴이 되면 이를 부정형이라고 한다.

(i) $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$일 때,

$\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 $\dfrac{0}{0}$ 꼴의 부정형으로 함수의 극한에 대한 성질을 직접 적용하여 구할 수 없다. 이 경우에는 먼저 주어진 식을 인수분해 또는 유리화하여 식을 변형한 다음에 극한값을 구한다.

(ii) $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}g(x)=\infty$일 때,

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴의 부정형으로 함수의 극한에 대한 기본 성질을 직접 적용하여 구할 수 없다. 이 경우에는 먼저 분모의 최고차항으로 분모, 분자를 나누어 주어진 식을 변형한 다음에 극한값을 구한다.

(iii) $\infty-\infty$ 또는 $0\times\infty$ 꼴의 부정형은 먼저 유리화 또는 통분을 이용하여 $\dfrac{0}{0}$ 또는 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 꼴의 식으로 변형한 다음에 극한값을 구한다.

(3) $x\to-\infty$일 때의 극한 $\lim_{x\to-\infty}f(x)$의 계산은 $x=-t$로 치환하여 $\lim_{t\to\infty}f(-t)$의 값을 계산한다.

2

목표| $\frac{0}{0}$ 꼴의 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\lim\limits_{x\to2}\frac{2x^2-7x+6}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to2}\frac{(x-2)(2x-3)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to2}(2x-3)=\mathbf{1}$

(2) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}(x^2+x+1)=\mathbf{3}$

(3) $\lim\limits_{x\to9}\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}=\lim\limits_{x\to9}\frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$

$=\lim\limits_{x\to9}(\sqrt{x}+3)=\mathbf{6}$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}$

$=\lim\limits_{x\to0}(\sqrt{x+1}+1)=\mathbf{2}$

교과서 59 쪽

문제 2 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim\limits_{x\to2}\frac{2x^2-7x+6}{x-2}$ (2) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1}$

(3) $\lim\limits_{x\to9}\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$ (4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$

예제 02 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+x+2}{x^2+3}$ (2) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)$

(1) $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴이 나오지 않도록 분모의 최고차항으로 분자와 분모를 각각 나눈다.

(2) 근호가 있는 부분을 유리화하여 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴로 변형한다.

풀이 (1) 분모와 분자의 각 항을 분모의 최고차항 x^2으로 나누면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x+2}{x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{3}{x^2}}=\frac{2}{1}=2$$

(2) 분자를 유리화하면

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3x}-x)(\sqrt{x^2+3x}+x)}{\sqrt{x^2+3x}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1}$$

$$=\frac{3}{2}$$

답 (1) 2 (2) $\frac{3}{2}$

문제 3 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4-x^2}{1+3x^2}$ (2) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5x^2-3x+4}{2x^2-1}$ (4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{x-2}$

발전 **문제 4** 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\left\{\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{1}{4}\right\}$ (2) $\lim\limits_{x\to1}(x-1)\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)$

3

목표| $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4-x^2}{1+3x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x^2}-1}{\frac{1}{x^2}+3}=-\mathbf{\frac{1}{3}}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{\sqrt{x^2+x}+x}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\mathbf{\frac{1}{2}}$

(3), (4)에서 $x=-t$라고 하면 $x\to-\infty$에서 $t\to\infty$이므로

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5x^2-3x+4}{2x^2-1}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{5t^2+3t+4}{2t^2-1}$

$=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{5+\frac{3}{t}+\frac{4}{t^2}}{2-\frac{1}{t^2}}=\mathbf{\frac{5}{2}}$

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{x-2}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\sqrt{2t^2+1}}{-t-2}$

$=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{\sqrt{2+\frac{1}{t^2}}}{-1-\frac{2}{t}}=-\sqrt{\mathbf{2}}$

4

목표| $\infty\times0$, $\infty-\infty$ 꼴의 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\left\{\frac{1}{(x+2)^2}-\frac{1}{4}\right\}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\left\{\frac{-x(x+4)}{4(x+2)^2}\right\}=\lim\limits_{x\to0}\left\{\frac{-x-4}{4(x+2)^2}\right\}=-\mathbf{\frac{1}{4}}$

(2) $\lim\limits_{x\to1}(x-1)\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)$

$=\lim\limits_{x\to1}(x-1)\cdot\frac{x^2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2}{x+1}=\mathbf{\frac{1}{2}}$

교과서 60 쪽

❶ 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x)\neq 0)$의 극한에서 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 실수)이고, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ 일 때, 함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\cdot g(x)\right\}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\lim_{x\to a}g(x)=\alpha\cdot 0=0$$

이므로 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$이다.

예제 03 다음 등식이 성립하도록 상수 a, b의 값을 구하여라.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=5$$

● $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$의 값이 존재할 때, (분모) → 0이면 (분자) → 0이다.

풀이 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=5$이고 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to 1}(x^2+ax+b)=0$, $1+a+b=0$

$b=-a-1$을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax-a-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+a+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+a+1)=2+a$$

이므로 $2+a=5$

따라서 $a=3$, $b=-4$

답 $a=3$, $b=-4$

문제 5 다음 등식이 성립하도록 상수 a, b의 값을 구하여라.

(1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{ax+b}{x^2-1}=3$ (2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{a\sqrt{x}-b}{x-4}=1$

사고력 기르기

추론
▶ 의사소통
문제 해결

지훈이는 두 함수 $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=x$에 대하여 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to 0}g(x)$의 값을 다음과 같이 구하였다. 잘못된 부분을 찾고 그 이유에 대하여 토의하여 보자.

본문 해설

❶ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\alpha(\alpha\neq 0$인 실수)이고, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$이면

$$\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}f(x)\div\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{\alpha}=0$$

이므로 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$임을 알 수 있다.

일반적으로 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0}$ (단, m, n은 자연수이고, $a_m\neq 0$, $b_n\neq 0$)의 극한값은 다음과 같이 정리할 수 있다.

(1) $m>n$, $\dfrac{a_m}{b_n}>0$일 때,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\infty$$

(2) $m>n$, $\dfrac{a_m}{b_n}<0$일 때,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0}=-\infty$$

(3) $m=n$일 때,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\frac{a_m}{b_n}$$

(4) $m<n$일 때,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0}=0$$

5

목표| 분수함수의 극한에 대한 성질을 활용하여 함수의 극한과 관련된 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{ax+b}{x^2-1}=3$이고 $\lim\limits_{x\to -1}(x^2-1)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to -1}(ax+b)=-a+b=0$, 따라서 $b=a$

$$\lim_{x\to -1}\frac{ax+b}{x^2-1}=\lim_{x\to -1}\frac{a(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{a}{-2}=3$$

따라서 $\boldsymbol{a=-6}$, $\boldsymbol{b=-6}$

(2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{a\sqrt{x}-b}{x-4}=1$이고 $\lim\limits_{x\to 4}(x-4)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to 4}(a\sqrt{x}-b)=2a-b=0$, 따라서 $b=2a$

$$\lim_{x\to 4}\frac{a\sqrt{x}-b}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{a(\sqrt{x}-2)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{a(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\frac{a}{\sqrt{4}+2}=\frac{a}{4}=1$$

따라서 $\boldsymbol{a=4}$, $\boldsymbol{b=8}$

사고력 기르기 의사소통

출제 의도| 함수의 극한에 대한 성질이 성립하는 경우를 이해하고 극한의 계산에서 틀린 부분을 찾아 그 이유를 설명할 수 있게 한다.

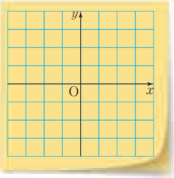
풀이| 잘못된 부분: $\lim\limits_{x\to 0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)g(x)$

이유: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$의 값이 존재하지 않으므로 함수의 극한에 대한 성질이 성립하지 않는다.

교과서 61 쪽

함수의 극한에서 대소 관계는 어떠한가?

탐구 활동 세 함수 $f(x)=1-\frac{x^2}{4}$, $g(x)=1+\frac{x^2}{4}$, $h(x)=1+\frac{x^2}{8}$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.



$\lim_{x\to2}f(x)$
$=\lim_{x\to2}\left(1-\frac{x^2}{4}\right)=\square$
$\lim_{x\to2}g(x)$
$=\lim_{x\to2}\left(1+\frac{x^2}{4}\right)=\square$
$\lim_{x\to2}h(x)$
$=\lim_{x\to2}\left(1+\frac{x^2}{8}\right)=\square$

1. 세 함수의 그래프를 그리고, $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 값의 크기를 비교하여 보자.
2. $\lim_{x\to2}f(x)$, $\lim_{x\to2}g(x)$, $\lim_{x\to2}h(x)$의 값을 구하고, 그 크기를 비교하여 보자.
3. 함숫값의 크기와 극한값의 크기 사이에는 어떤 관계가 있는지 말하여 보자.

❶ 함수의 극한에서는 다음과 같은 대소 관계가 성립한다.

함수의 극한의 대소 관계는 $x \to a$를 $x \to \infty$, $x \to -\infty$로 바꾸어도 성립한다.

함수의 극한의 대소 관계

$\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}g(x)=\beta$ (α, β는 실수)일 때, a에 가까운 모든 x의 값에 대하여

(1) $f(x)\le g(x)$이면 $\alpha\le\beta$

(2) $f(x)\le h(x)\le g(x)$이고 $\alpha=\beta$이면 $\lim_{x\to a}h(x)=\alpha$

❷ **참고** (1) $f(x)<g(x)$라고 해서 반드시 $\lim_{x\to a}f(x)<\lim_{x\to a}g(x)$가 성립하는 것은 아니다.

(2) $f(x)<h(x)<g(x)$라고 해서 반드시 $\lim_{x\to a}f(x)<\lim_{x\to a}h(x)<\lim_{x\to a}g(x)$가 성립하는 것은 아니다.

예제 04 함수 $f(x)$에 대하여 $0\le x\le2$에서 $2x\le f(x)\le x^2+1$일 때, $\lim_{x\to1}f(x)$의 값을 구하여라.

풀이 $0\le x\le2$일 때 $2x\le f(x)\le x^2+1$이므로 $\lim_{x\to1}2x\le\lim_{x\to1}f(x)\le\lim_{x\to1}(x^2+1)$

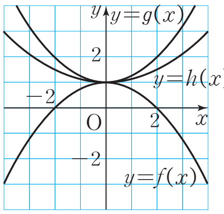
$\lim_{x\to1}2x=2$, $\lim_{x\to1}(x^2+1)=2$이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=2$

답 2

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 세 함수에 대하여 함숫값의 대소 관계와 극한값의 대소 관계를 비교하여 함수의 극한의 대소 관계에 대한 성질을 발견하는 토대가 되도록 한다.

1. 세 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽과 같다.



따라서 임의의 x에 대하여

$\boldsymbol{f(x)\le h(x)\le g(x)}$

2. $\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\left(1-\frac{x^2}{4}\right)=\mathbf{0}$,

$\lim_{x\to2}g(x)=\lim_{x\to2}\left(1+\frac{x^2}{4}\right)=\mathbf{2}$,

$\lim_{x\to2}h(x)=\lim_{x\to2}\left(1+\frac{x^2}{8}\right)=\mathbf{\frac{3}{2}}$

따라서

$\boldsymbol{\lim_{x\to2}f(x)\le\lim_{x\to2}h(x)\le\lim_{x\to2}g(x)}$

3. 함숫값 사이의 부등호 방향과 극한값 사이의 부등호 방향이 같다.

본문 해설

❶ 수열의 극한의 대소 관계

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$

일 때 다음이 성립한다.

① 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le b_n$이면 $\alpha\le\beta$

② 수열 $\{c_n\}$과 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\le c_n\le b_n$이고, $\alpha=\beta$이면 $\lim_{n\to\infty}c_n=\alpha$

❷ 함수의 극한의 대소 관계: 두 함수 $f(x)$, $g(x)$와 a에 충분히 가까운 x의 값에 대하여 $f(x)\le g(x)$이고, 극한값 $\lim_{x\to a}f(x)$, $\lim_{x\to a}g(x)$가 각각 존재하면 $x \to a$일 때, $\lim_{x\to a}f(x)\le\lim_{x\to a}g(x)$가 성립한다.

이때, $f(x)<g(x)$ $(x\ne a)$이지만 $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)$인 경우가 있다.

이를테면, $f(x)=-x^2$, $g(x)=x^2$일 때, $x\ne0$에서 $-x^2<x^2$이지만 $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}g(x)=0$

지/도/자/료

$p>0$일 때, $0<|x-c|<p$인 모든 x에 대하여 $f(x)\le h(x)\le g(x)$가 성립하고, $\lim_{x\to c}f(x)=\lim_{x\to c}g(x)=l$이면 $\lim_{x\to c}h(x)=l$임은 다음과 같이 증명할 수 있다.

임의의 양수 $\varepsilon>0$에 대하여 다음과 같은 δ_1, δ_2를 선택하자.

$0<|x-c|<\delta_1$이면 $l-\varepsilon<f(x)<l+\varepsilon$

$0<|x-c|<\delta_2$이면 $l-\varepsilon<g(x)<l+\varepsilon$

$\delta=\min(p,\ \delta_1,\ \delta_2)$라 놓고, $0<|x-c|<\delta$이면

$l-\varepsilon<f(x)\le h(x)\le g(x)<l+\varepsilon$

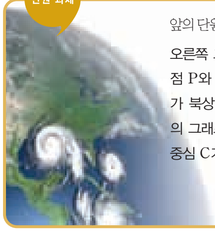
이므로 $|h(x)-l|<\varepsilon$이 성립한다.

교과서 62 쪽

문제 6 모든 양수 x에 대하여 함수 $f(x)$가 $\frac{5x+1}{x+3} \le f(x) \le \frac{5x^2-3x+6}{x^2}$을 만족시킬 때, $\lim_{x \to \infty} f(x)$의 값을 구하여라.

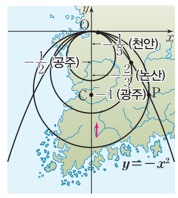
발전 **문제 7** 모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$가 $x^2-1 \le f(x) \le 3x^2-4x+1$을 만족시킬 때, $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1}$의 값을 구하여라.

단원 과제



앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=-x^2$의 그래프 위의 한 점 P와 원점 O를 지나며 중심이 y축 위에 있는 태풍 C가 북상하며 그 규모가 작아지고 있다. 점 P가 $y=-x^2$의 그래프를 따라 원점 O에 한없이 가까워질 때, 태풍의 중심 C가 한없이 가까워지는 지역을 예측하여라.



컴퓨터의 활용

함수의 극한을 확인하여 보자.

컴퓨터 프로그램을 이용하여 등식 $\lim_{x \to -\infty} (\sqrt{x^2-3x}+x)=\frac{3}{2}$이 성립함을 확인하여 보자.

1. 수식 입력 상자에 'sqrt$(x$^$2-3*x)+x$'를 입력하면 함수 $f(x)=\sqrt{x^2-3x}+x$와 그 그래프가 화면에 나타난다.

2. 수식 입력 상자에 '$y=3/2$'을 입력하면 직선 $y=1.5$와 그 그래프가 **1**의 결과와 함께 화면에 나타난다.

3. 마우스 포인터를 그래프로 이동한 후, 마우스 휠을 아래로 돌려 그래프를 축소하여 보면 x의 값이 한없이 작아질 때, y의 값이 $\frac{3}{2}$에 가까워지는 것을 확인할 수 있다.

4. 문제 중에서 복잡한 식을 고르고, 컴퓨터 프로그램을 이용하여 함수의 극한값을 확인하여 보자.

단원 과제

목표| 실생활에서 함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있음을 알게 한다.

지도의 유의점| 태풍의 중심의 좌표를 $(0,\ y)$라 두고, 태풍의 경계 위의 점의 좌표를 $(x,\ -x^2)$으로 두어 문제의 조건에 맞는 식의 극한을 구할 수 있게 한다.

풀이| 태풍의 중심 C의 좌표를 $(0,\ y)$, 태풍의 경계 위의 점 P의 좌표를 $(x,\ -x^2)$으로 놓으면 $\overline{CO}^2=\overline{CP}^2$이므로

$y^2=x^2+(x^2+y)^2$, $y=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$

P $\to$ O이면 $x \to 0$이므로 태풍의 중심 C가 한없이 가까워지는 점의 y좌표는

$\lim_{x \to 0} y = \lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

따라서 태풍의 중심 C는 공주 지역으로 한없이 가까워진다.

6

목표| 함수의 극한의 대소 관계를 이용하여 주어진 함수의 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\lim_{x \to \infty} \frac{5x+1}{x+3} \le \lim_{x \to \infty} f(x) \le \lim_{x \to \infty} \frac{5x^2-3x+6}{x^2}$

$\lim_{x \to \infty} \frac{5x+1}{x+3}=5$, $\lim_{x \to \infty} \frac{5x^2-3x+6}{x^2}=5$이므로

$\lim_{x \to \infty} f(x)=\mathbf{5}$

7

목표| 함수의 극한의 대소 관계를 이용하여 주어진 분수함수의 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} \le \lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} \le \lim_{x \to 1} \frac{3x^2-4x+1}{x-1}$

$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}=2$, $\lim_{x \to 1} \frac{3x^2-4x+1}{x-1}=2$이므로

$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1}=\mathbf{2}$

지/도/자/료 컴퓨터의 활용

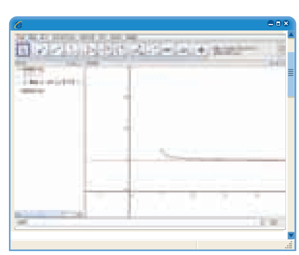
컴퓨터 프로그램을 이용하여 등식

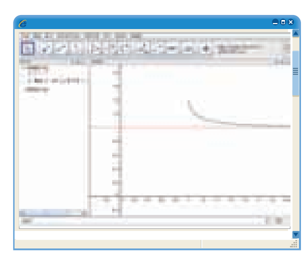
$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})=1$$

이 성립함을 확인하여 보자.

1. 수식 입력 상자에 'sqrtx(sqrt{x+1}−sqrt{x−1})'을 입력하면 함수 $f(x)=\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})$과 그 그래프가 화면에 나타난다.

2. 수식 입력 상자에 '$y=1$'을 입력하면 직선 $y=1$과 그 그래프가 **1**의 결과와 함께 화면에 나타난다.





3. 마우스 포인터를 그래프로 이동한 뒤, 마우스 휠을 아래로 돌려 그래프를 축소하여 보면 x의 값이 한없이 커질 때, y의 값이 1에 가까워지는 것을 확인할 수 있다.

교과서 63 쪽

중단원 기초

[해답 p.196]

수준별 학습

1 다음 극한값을 그래프를 이용하여 구하여라. 01 함수의 극한의 뜻

(1) $\lim\limits_{x\to1}(x+3)$ (2) $\lim\limits_{x\to2}(x^2-1)$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x+1}$ (4) $\lim\limits_{x\to5}\sqrt{x-3}$

2 다음 극한을 조사하고, 극한이 존재하면 그 극한값을 구하여라. 01 함수의 극한의 뜻

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{|x|}$ (2) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-1}{|x-1|}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}$ (4) $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2$

3 다음 극한을 조사하고, 극한이 존재하면 그 극한값을 구하여라. 01 함수의 극한의 뜻

(1) $\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{1}{x}$ (2) $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{1}{x}$

(3) $\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{|x|}{x}$ (4) $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{|x|}{x}$

4 다음 극한값을 구하여라. 02 함수의 극한에 대한 성질

(1) $\lim\limits_{x\to1}(5x^2+4x+2)$ (2) $\lim\limits_{x\to2}(x-1)(3x^2-2x-1)$

(3) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x+3}{x-2}$ (4) $\lim\limits_{x\to4}\left(1-\dfrac{3}{x-1}\right)$

5 다음 극한값을 구하여라. 02 함수의 극한에 대한 성질

(1) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$ (2) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+5x-3}{4x^2+1}$ (4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x}{x^2+3}$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$ (6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)$

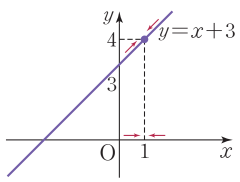
중/단/원 기본

1

목표 | 함수의 그래프를 이용하여 극한값을 구할 수 있게 한다.

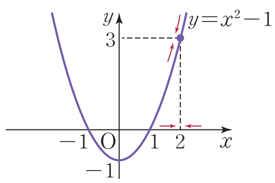
풀이

(1)



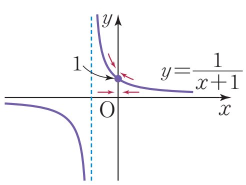
$\lim\limits_{x\to1}(x+3)=\mathbf{4}$

(2)



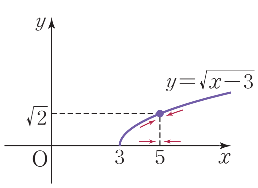
$\lim\limits_{x\to2}(x^2-1)=\mathbf{3}$

(3)



$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x+1}=\mathbf{1}$

(4)

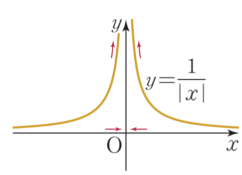


$\lim\limits_{x\to5}\sqrt{x-3}=\sqrt{\mathbf{2}}$

2

목표 | 함수의 극한을 조사하여 극한값을 구할 수 있게 한다.

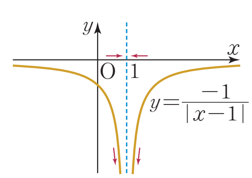
풀이 (1) 함수 $y=\dfrac{1}{|x|}$ 의 그래프를 그려 보면



$\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{1}{|x|}=\infty$, $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{1}{|x|}=\infty$

따라서 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{|x|}=\boldsymbol{\infty}$

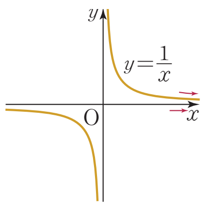
(2) 함수 $y=\dfrac{-1}{|x-1|}$ 의 그래프를 그려 보면



$\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{-1}{|x-1|}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{-1}{|x-1|}=-\infty$

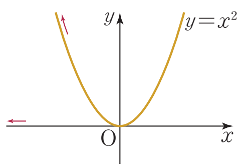
따라서 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-1}{|x-1|}=\boldsymbol{-\infty}$

(3) 함수 $y=\dfrac{1}{x}$ 의 그래프를 그려 보면



따라서 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=\mathbf{0}$

(4) 함수 $y=x^2$의 그래프를 그려 보면

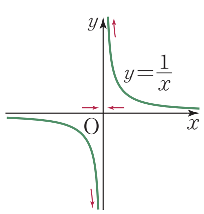


따라서 $\lim_{x\to-\infty}x^2=\infty$

3

목표| 함수의 극한을 조사하여 극한값을 구할 수 있게 한다.

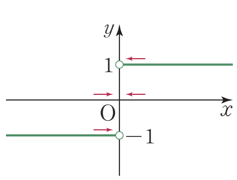
풀이| 함수 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프에서



(1) $\lim_{x\to0-}\dfrac{1}{x}=\mathbf{-\infty}$

(2) $\lim_{x\to0+}\dfrac{1}{x}=\infty$

함수 $y=\dfrac{|x|}{x}$ 의 그래프에서



(3) $\lim_{x\to0-}\dfrac{|x|}{x}=\mathbf{-1}$

(4) $\lim_{x\to0+}\dfrac{|x|}{x}=\mathbf{1}$

4

목표| 함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 함수의 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이| 함수의 극한에 대한 성질에 의하여

(1) $\lim_{x\to1}(5x^2+4x+2)$

$=5\lim_{x\to1}x^2+4\lim_{x\to1}x+\lim_{x\to1}2=\mathbf{11}$

(2) $\lim_{x\to2}(x-1)(3x^2-2x-1)$

$=\lim_{x\to2}(x-1)\cdot\lim_{x\to2}(3x^2-2x-1)=\mathbf{7}$

(3) $\lim_{x\to3}\dfrac{2x+3}{x-2}=\dfrac{\lim_{x\to3}(2x+3)}{\lim_{x\to3}(x-2)}=\mathbf{9}$

(4) $\lim_{x\to4}\left(1-\dfrac{3}{x-1}\right)=\lim_{x\to4}1-\dfrac{\lim_{x\to4}3}{\lim_{x\to4}(x-1)}=\mathbf{0}$

5

목표| $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty\times0$, $\infty-\infty$ 꼴의 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\lim_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}(x^2+2x+4)=\mathbf{12}$

(2) $\lim_{x\to7}\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}=\lim_{x\to7}\dfrac{(\sqrt{x+2}-3)(\sqrt{x+2}+3)}{(x-7)(\sqrt{x+2}+3)}$

$=\lim_{x\to7}\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+3}=\mathbf{\dfrac{1}{6}}$

(3) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2+5x-3}{4x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{x^2}}{4+\dfrac{1}{x^2}}=\mathbf{\dfrac{1}{4}}$

(4) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x}{x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{3-\dfrac{2}{x}}{1+\dfrac{3}{x^2}}=\mathbf{3}$

(5) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{(\sqrt{x^2+1}+x)}=\mathbf{0}$

(6) $\lim_{x\to0}\dfrac{1}{x}\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)=\lim_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}\times\dfrac{x+1-1}{x+1}\right)$

$=\lim_{x\to0}\dfrac{1}{x+1}=\mathbf{1}$

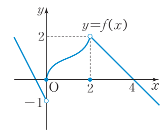
교과서 64 쪽

중단원 기본

[해답 p. 196]

수준별 학습

1 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 중에서 극한값이 존재하지 않는 것을 찾아라.



㉠ $\lim\limits_{x\to0}f(x)$	㉡ $\lim\limits_{x\to1}f(x)$
㉢ $\lim\limits_{x\to2}f(x)$	㉣ $\lim\limits_{x\to4}f(x)$

01 함수의 극한의 뜻

2 함수 $f(x)=\begin{cases} x-k & (x<0) \\ x^2-6x+9 & (x\ge0) \end{cases}$에 대하여 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$의 값이 존재하도록 하는 상수 k의 값을 구하여라.

01 함수의 극한의 뜻
좌극한과 우극한

3 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{x^2-64}{\sqrt[3]{x}-2}$ (2) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+1}$ (4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-\dfrac{1}{2}\right)$

02 함수의 극한에 대한 성질
극한값의 계산

4 다음 물음에 답하여라.

(1) 상수 a, b에 대하여 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{a\sqrt{x}-2+b}{x-3}=1$일 때, a^2+b^2의 값을 구하여라.

(2) 상수 a에 대하여 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-a}$이 0이 아닌 일정한 값을 가질 때, $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^2-ax+3}$의 값을 구하여라.

02 함수의 극한에 대한 성질
미정계수의 결정

5 모든 양수 x에 대하여 함수 $f(x)$가 $\dfrac{3x-2}{x}\le f(x)\le\dfrac{3x^2+x}{x^2}$를 만족시킬 때, 극한값 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$를 구하여라.

02 함수의 극한에 대한 성질
함수의 극한의 대소 관계

중/단/원 기본

1

목표| 함수의 좌극한과 우극한의 뜻을 알고 함수의 존재성을 판단할 수 있게 한다.

풀이| ㉠ $\lim\limits_{x\to0-}f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=0$이고

$\lim\limits_{x\to0-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0+}f(x)$이므로

$\lim\limits_{x\to0}f(x)$가 존재하지 않는다.

따라서 극한값이 존재하지 않는 것은 ㉠이다.

2

목표| 함수의 좌극한과 우극한의 뜻을 알고 이를 활용하여 주어진 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $\lim\limits_{x\to0-}(x-k)=-k$,

$\lim\limits_{x\to0+}(x^2-6x+9)=9$이고 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$의 값이 존재하므로 $-k=9$, $k=\mathbf{-9}$

3

목표| 함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 함수의 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{x^2-64}{\sqrt[3]{x}-2}$

$=\lim\limits_{x\to8}\dfrac{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)(x+8)}{\sqrt[3]{x}-2}=\mathbf{192}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x})}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-x}}=\mathbf{1}$

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+1}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{-t-\sqrt{t^2-1}}{-t+1}=\mathbf{2}$

(4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-\dfrac{1}{2}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x-1}\left\{\dfrac{2x^2-x-1}{2(x+1)}\right\}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x+1}{2(x+1)}=\mathbf{\dfrac{3}{4}}$

4

목표| 분수함수의 극한에 대한 성질을 활용하여 함수의 극한과 관련된 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\lim\limits_{x\to3}(a\sqrt{x}-2+b)=0$에서 $b=2-a\sqrt{3}$

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{a\sqrt{x}-2+2-a\sqrt{3}}{x-3}$

$=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{a(\sqrt{x}-\sqrt{3})}{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})}=\dfrac{a}{2\sqrt{3}}=1$

에서 $a=2\sqrt{3}$ 이때 $b=2-(2\sqrt{3})(\sqrt{3})=-4$이므로

$a^2+b^2=\mathbf{28}$

(2) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-a}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x+3)(x-2)}{x^2-a}$

이때 (분자)$=0$이므로 (분모)$=4-a=0$에서 $a=4$

따라서 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+3}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-3)}=\mathbf{-1}$

5

목표| 함수의 극한의 대소 관계를 이용하여 주어진 함수의 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-2}{x}=3$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x}{x^2}=3$

이므로 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\mathbf{3}$

중단원 실력

[해답 p. 197]

수준별 학습

1 함수 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+1}+x-1}{x^n+1}$에 대하여 $x=1$에서 함수 $f(x)$의 극한값이 존재하는지 말하여라.

01 함수의 극한의 뜻

2 함수의 극한에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 찾아라.

02 함수의 극한에 대한 성질

ㄱ. $\lim\limits_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}$와 $\lim\limits_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}$의 값이 각각 존재하면 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$의 값도 존재한다.

ㄴ. $\lim\limits_{x\to a}f(x)$와 $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)$의 값이 각각 존재하면 $\lim\limits_{x\to a}g(x)$의 값도 존재한다.

ㄷ. $\lim\limits_{x\to a}g(x)$와 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$의 값이 각각 존재하면 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$의 값도 존재한다. (단, $g(x)\neq 0$)

ㄹ. 모든 실수 x에 대하여 $f(x)<g(x)$이고, $\lim\limits_{x\to a}f(x)$와 $\lim\limits_{x\to a}g(x)$의 값이 각각 존재하면 $\lim\limits_{x\to a}f(x)<\lim\limits_{x\to a}g(x)$이다.

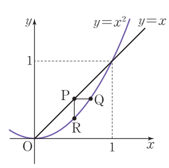
3 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to 1}\{f(x)-g(x)\}=3$을 만족시킬 때, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3f(x)+2g(x)}{2f(x)-g(x)}$의 값을 구하여라.

02 함수의 극한에 대한 성질

4 다항함수 $f(x)$가 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2+x-2}=3$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x^2+x-2}=2$를 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하여라.

02 함수의 극한에 대한 성질
다항식의 결정

5 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=x$ 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ x)$ $(x>0)$에 대하여 점 P를 지나고 x축, y축에 각각 평행한 직선이 곡선 $y=x^2$과 만나는 점을 각각 Q, R라고 할 때, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\overline{\mathrm{PR}}}{\overline{\mathrm{PQ}}}$의 값을 구하여라.



02 함수의 극한에 대한 성질
도형에서의 활용

중/단/원 실력

1

목표| 함수의 극한값이 존재하는지 판단할 수 있게 한다.

풀이| (i) $x\to 1+$일 때 $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=\infty$이므로

$f(x)=x$이고 $\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=1$

(ii) $x\to 1-$일 때 $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$이므로

$f(x)=x-1$이고 $\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=0$

따라서 $\lim\limits_{x\to 1+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1-}f(x)$이므로 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$는 **존재하지 않는다.**

2

목표| 함수의 극한에 대한 성질을 이해하고, 이를 활용하여 주어진 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| ㄴ. $\lim\limits_{x\to a}f(x)$와 $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)$의 값이 각각 존재하므로

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)g(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to a}g(x)$의 값은

$\lim\limits_{x\to a}f(x)\neq 0$일 때에만 존재한다.

ㄹ. (반례)

$f(x)=\begin{cases}-x^2 & (x\neq 0)\\ -1 & (x=0)\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}x^2 & (x\neq 0)\\ 1 & (x=0)\end{cases}$

모든 실수 x에 대하여 $f(x)<g(x)$이고

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)$

따라서 옳은 것은 **ㄱ, ㄷ**이다.

3

목표| 함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 주어진 분수함수의 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $f(x)-g(x)=h(x)$라고 하면

$g(x)=f(x)-h(x)$

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to 1}h(x)=3$이므로

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3f(x)+2g(x)}{2f(x)-g(x)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5f(x)-2h(x)}{f(x)+h(x)}=\mathbf{5}$

4

목표| 함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 함숫값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2+x-2}=3$이므로 $f(x)$는 이차식이고 이차항의 계수는 3이다. $f(x)=3x^2+ax+b$로 놓으면

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+ax+b}{x^2+x-2}=2$에서 $3+a+b=0$이므로

$b=-3-a$를 대입하면

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(3x+3+a)}{(x-1)(x+2)}=\dfrac{6+a}{3}=2$

$a=0$, $b=-3$이므로 $f(x)=3x^2-3$에서 $f(2)=\mathbf{9}$

5

목표| 함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 주어진 분수식의 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이| 세 점 P, Q, R의 좌표는 각각

$\mathrm{P}(x,\ x)$, $\mathrm{Q}(\sqrt{x},\ x)$, $\mathrm{R}(x,\ x^2)$이므로

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\overline{\mathrm{PR}}}{\overline{\mathrm{PQ}}}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-x^2|}{|\sqrt{x}-x|}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{|x-x^2|\,|\sqrt{x}+x|}{|\sqrt{x}-x|\,|\sqrt{x}+x|}$

$=\lim\limits_{x\to 1}|\sqrt{x}+x|=\mathbf{2}$

2 함수의 연속

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 함수의 연속의 뜻을 알게 한다.

② 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
01 함수의 연속	함수의 연속
02 연속함수의 성질	연속함수의 성질
	최대 · 최소 정리
	사잇값 정리
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

교과서 66 쪽

2 함수의 연속

소득이 있는 우리나라 국민은 소득세 납부의 의무가 있다.

소득세는 개인이 회사에서 월급을 받거나, 장사를 해서 이익이 났을 경우에 그 개인의 소득에 대하여 납부하는 세금이다. 특히 회사에서 받는 월급이 개인의 주 소득일 경우에 그 개인을 근로 소득자라고 하며, 근로 소득에 대한 세금을 근로 소득세라고 한다.

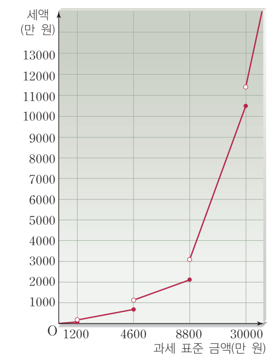
하지만 소득이 많은 사람과 적은 사람이 모두 똑같이 세금을 내는 것은 아니다. 국세청에서는 소득이 높아 과세 표준 금액이 많은 사람에게는 더 높은 세율을 통해 누진세를 부과하고 있다.

2012년 9월 개인의 과세 표준 금액에 대한 기본세율은 다음과 같다.

근로 소득 간이세액표

과세 표준 금액	세율
1200만 원 이하	6 %
1200만 원 초과 4600만 원 이하	15 %
4600만 원 초과 8800만 원 이하	24 %
8800만 원 초과 3억 원 이하	35 %
3억 원 초과	38 %

〈국세청, http://www.nts.go.kr〉



그런데 과세 표준 금액의 경계에 있는 사람은 소득 차이가 얼마 나지 않더라도 세율이 크게 달라지는 불합리한 면이 있다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 71쪽

근로 소득세 부과의 불합리한 면을 보완할 수 있는 방법은 무엇일까?

들어가면서 키, 몸무게, 시간, 길이, 부피, 온도, 압력 등 수없이 많은 연속적인 양들이 있는 반면에 우편물의 무게에 대한 요금, 이동거리에 대한 요금, 소득에 대한 세금의 관계 등은 구간에 따라 하나의 값이 결정된다. 이와 같이 두 변수 사이의 관계를 그래프로 나타냈을 때 이어진 그래프가 되는 경우와 끊어진 그래프가 되는 경우가 있다. 이전에 배운 함수의 식과 극한의 개념을 이용하면 그래프를 직접 그리지 않고도 이어진 그래프인지 끊어진 그래프인지를 쉽게 판단할 수 있다.

이 단원에서는 한 점에서 함수의 연속을 정의하는 과정에서 시작하여, 구간, 실수 전체로 차례대로 범위를 확장시켜 함수의 연속성을 정의한 뒤 연속함수의 성질을 이용하여 새로운 함수의 연속성도 조사하여 본다. 그 다음에는 최대 · 최소 정리와 사잇값 정리를 이용하여 함수의 최댓값, 최솟값을 각각 구하고, 방정식의 근의 존재 여부를 확인한 뒤 실생활에서 접할 수 있는 문제를 해결할 수 있게 한다.

성취 기준과 성취 수준

성취 기준		성취 수준
1. 함수의 연속의 뜻을 안다.	상	주어진 구간에서 함수의 연속성을 판별할 수 있다.
	중	주어진 점에서 함수의 연속성을 판별할 수 있다.
	하	그래프를 보고 주어진 점에서 함수의 연속성을 판별할 수 있다.
2. 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.	상	연속함수의 성질을 활용하여 문제를 해결하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
	중	주어진 구간에서 연속함수의 최댓값, 최솟값을 구할 수 있다.
	하	연속함수의 성질을 이용하여 주어진 함수의 연속성을 판별할 수 있다.

교과서 67 쪽

01 함수의 연속

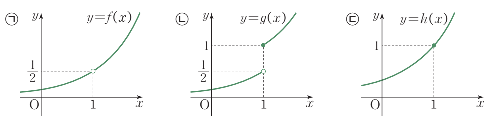
● 함수의 연속의 뜻을 안다.

함수의 연속이란 무엇인가?

생각 열기

탐구 활동

다음은 세 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프이다. 다음 물음에 답하여 보자.



1. $x=1$에서의 함숫값이 존재하는 그래프를 찾아보자.

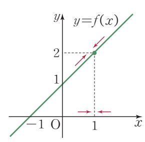
2. $x \to 1$일 때의 극한값이 존재하는 그래프를 찾아보자.

3. $x=1$에서의 함숫값과 $x \to 1$일 때의 극한값이 같은 그래프를 찾아보자.

함수 $f(x)=x+1$에서

$$\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$$

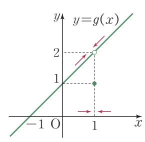
이 성립하고, 그 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $x=1$에서 연결되어 있다.



❶ 그러나 함수 $g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & (x\neq1) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$에서

$$\lim_{x\to1} g(x)\neq g(1)$$

이 성립하고, 그 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $x=1$에서 끊어져 있음을 알 수 있다.



● 함수가 정의되지 않는 점에서도 극한값은 존재할 수 있다.

01 함수의 연속

소단원 지도 목표

① 함수의 연속의 뜻을 이해하게 한다.

② 구간의 뜻을 알고, 닫힌 구간, 열린 구간, 반닫힌(반열린) 구간을 표시하는 방법을 알게 한다.

③ 구간에서 함수가 연속이라는 말의 뜻을 이해하게 하고, 여러 가지 함수의 연속성을 알아보게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 함수의 연속성은 함수의 그래프를 이용하여 직관적으로 이해하도록 지도한다.

2. 함수의 연속, 불연속의 개념은 함수의 정의역에 속하는 점에 대하여만 다룬다.

3. 실수의 집합을 구간의 기호를 사용하여 나타낼 수 있음을 알게 한다.

4. 열린 구간의 기호 $(a,\ b)$와 순서쌍의 기호 $(a,\ b)$를 혼동하지 않도록 지도한다.

새로 나온 용어와 기호

- 연속(連續, continuous)
- 불연속(不連續, discontinuous)
- 구간(區間, interval)
- 열린 구간(open interval)
- 닫힌 구간(closed interval)
- 반닫힌(반열린) 구간(half closed (open) interval)
- 연속함수(連續函數, continuous function)
- $[a,\ b]$, $(a,\ b)$, $[a,\ b)$, $(a,\ b]$

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 함수의 그래프가 어떤 점에서 끊어지지 않은 경우와 끊어진 경우를 비교함으로써 연속의 개념을 직관적으로 도입한다. 이와 함께 한 점에서의 함숫값과 극한값의 존재 여부와 두 값의 일치 여부를 동시에 확인함으로써 연속의 정의를 이해하는 토대가 되도록 한다.

1. $g(1)=1$, $h(1)=1$이므로 두 함수 $y=g(x)$, $y=h(x)$는 $x=1$에서의 함숫값이 존재한다. 따라서 ㉡, ㉢이다.

2. $\displaystyle\lim_{x\to1-} f(x)=\frac{1}{2}=\lim_{x\to1+} f(x)$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to1} f(x)=\frac{1}{2}$

$\displaystyle\lim_{x\to1-} h(x)=1=\lim_{x\to1+} h(x)$이므로 $\displaystyle\lim_{x\to1} h(x)=1$

두 함수 $y=f(x)$, $y=h(x)$는 $x=1$에서의 극한값이 존재한다. 따라서 ㉠, ㉢이다.

3. $\displaystyle\lim_{x\to1} h(x)=1=h(1)$

함수 $y=h(x)$는 $x=1$에서의 함숫값과 극한값이 각각 존재하며 그 값이 서로 같다. 따라서 ㉢이다.

본문 해설

❶ 함수 $g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & (x\neq1) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$은 $x=1$에서 연속이 아니지만 $g(1)=2$로 다시 정의하면 함수 $g(x)$는 연속이다.

이와 같이 $x=a$에서 불연속이지만 $x=a$에서 함숫값을 다시 정의함으로써 그 점에서 연속이 되도록 할 수 있는 경우를 제거 가능한 불연속이라고 한다.

본문 해설

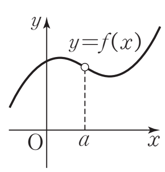
❶ 함수의 연속의 개념은 원래 곡선이 끊어져 있지 않고 이어져 있다는 직관적인 개념에서 발생한 것이다. 곡선을 함수의 그래프로서 해석적으로 파악하게 됨에 따라 곡선의 연속성의 문제가 생겼는데, 현재 고등학교에서의 함수의 연속의 정의는 수학자 코시의 방법에 의한 것이다.

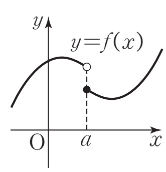
❷ 함수가 불연속인 경우는 다음과 같이 세 가지로 나눌 수 있다.

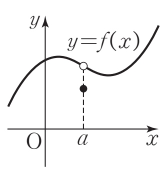
(1) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되지 않는다.

(2) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$의 값이 존재하지 않는다.

(3) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$와 $f(a)$의 값이 서로 다르다.

(1)


(2)


(3)


교과서 68 쪽

❶ 일반적으로 함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 조건을 만족시킬 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **연속**이라고 한다.

> ❶ 함숫값 $f(a)$가 정의되어 있다. 즉, a는 함수 f의 정의역에 속한다.
> ❷ 극한값 $\lim\limits_{x \to a} f(x)$가 존재한다.
> ❸ $\lim\limits_{x \to a} f(x)=f(a)$

❷ 한편 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이 아닐 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **불연속**이라고 한다. 즉, 함수 $f(x)$가 ❶, ❷, ❸ 중에서 어느 한 가지라도 만족시키지 않으면 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이다.

예제 01 다음 함수가 $x=1$에서 연속인지 불연속인지 조사하여라.

(1) $f(x)=x^2+x$　　(2) $g(x)=\begin{cases} x+1 & (x \neq 1) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$

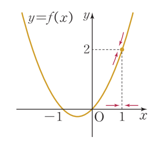
❸ **풀이** (1) 함수 $f(x)=x^2+x$에 대하여

❶ $f(1)=2$

❷ $\lim\limits_{x \to 1} f(x)=2$

❸ $\lim\limits_{x \to 1} f(x)=f(1)$

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.



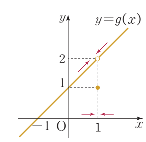
(2) 함수 $g(x)=\begin{cases} x+1 & (x \neq 1) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$에 대하여

❶ $g(1)=1$

❷ $\lim\limits_{x \to 1} g(x)=2$

❸ $\lim\limits_{x \to 1} g(x) \neq g(1)$

따라서 $g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.



답 (1) 연속　(2) 불연속

문제 1 다음 함수가 $x=2$에서 연속인지 불연속인지 조사하여라.

(1) $f(x)=x^2-1$　　(2) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$

(3) $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x-2} & (x \geq 2) \\ -1 & (x<2) \end{cases}$　　(4) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{x-2} & (x \neq 2) \\ 1 & (x=2) \end{cases}$

연속의 조건 중 ❸이 성립하려면 반드시 ❶, ❷가 먼저 성립해야 하므로 연속의 정의를 ❸만으로 할 수도 있다.

❸ 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속임을 수열의 극한을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

(i) $x=a$는 f의 정의역에 속한다.

(ii) f의 정의역에 속하는 $x_n \to a$인 임의의 수열 $\{x_n\}$에 대하여 $\lim\limits_{x_n \to a} f(x_n)=f(a)$이다.

1

목표| 함수의 연속의 뜻을 이해하고, 한 점에서의 연속성을 확인할 수 있게 한다.

풀이| (1) 함수 $f(x)=x^2-1$에 대하여

❶ $f(2)=3$

❷ $\lim\limits_{x \to 2} f(x)=3$

❸ $\lim\limits_{x \to 2} f(x)=f(2)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 **연속**이다.

(2) 함수 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$에 대하여 함숫값 $f(2)$가 존재하지 않으므로 $x=2$에서 **불연속**이다.

(3) 함수 $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x-2} & (x \geq 2) \\ -1 & (x<2) \end{cases}$에 대하여

$f(2)=0$, $\lim\limits_{x \to 2+} f(x)=0$에서 $f(2)=\lim\limits_{x \to 2+} f(x)=0$이지만 $\lim\limits_{x \to 2-} f(x) \neq f(2)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 **불연속**이다.

(4) 함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{x-2} & (x \neq 2) \\ 1 & (x=2) \end{cases}$에 대하여

❶ $f(2)=1$

❷ $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{x-2}=\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x-1)}{x-2}=1$

❸ $\lim\limits_{x \to 2} f(x)=f(2)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 **연속**이다.

교과서 69 쪽

이제 어떤 범위에서 함수의 연속에 대하여 알아보자.

먼저 어떤 범위에 속하는 모든 실수를 기호로 나타내는 방법에 대하여 알아보자.

두 실수 a, b $(a<b)$에 대하여 실수의 집합

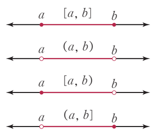
$\{x|a\le x\le b\}$, $\{x|a<x<b\}$

$\{x|a\le x<b\}$, $\{x|a<x\le b\}$

를 각각 **구간**이라 하고, 차례로 기호

$[a, b]$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$

와 같이 나타낸다.



이때 $[a, b]$를 **닫힌 구간**, (a, b)를 **열린 구간**이라 하고, $[a, b)$, $(a, b]$를 **반닫힌 구간** 또는 **반열린 구간**이라고 한다.

또 실수의 집합

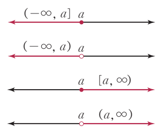
$\{x|x\le a\}$, $\{x|x<a\}$

$\{x|x\ge a\}$, $\{x|x>a\}$

도 구간이라 하고, 차례로 기호

$(-\infty, a]$, $(-\infty, a)$, $[a, \infty)$, (a, ∞)

와 같이 나타낸다.



특히 실수 전체의 집합도 하나의 구간으로 보고, 기호로 $(-\infty, \infty)$와 같이 나타낸다.

보기 (1) 함수 $f(x)=\sqrt{x+1}$의 정의역을 구간의 기호로 나타내면 $[-1, \infty)$이다.
(2) 함수 $g(x)=\frac{1}{x}$의 정의역을 구간의 기호로 나타내면 $(-\infty, 0)\cup(0, \infty)$이다.
(3) 함수 $h(x)=x^2$의 정의역을 구간의 기호로 나타내면 $(-\infty, \infty)$이다.

문제 2 다음 함수의 정의역을 구간의 기호를 이용하여 나타내어라.

(1) $f(x)=\frac{2}{x-1}$ (2) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

함수 $f(x)$가 어떤 열린 구간의 모든 점에서 연속일 때, 함수 $f(x)$는 그 구간에서 연속이라고 한다.

또 닫힌 구간 $[a, b]$에서 정의된 함수 $f(x)$가 열린 구간 (a, b)에서 연속이고

$$\lim_{x\to a+} f(x)=f(a),\ \lim_{x\to b-} f(x)=f(b)$$

일 때, 함수 $f(x)$는 구간 $[a, b]$에서 연속이라고 한다.

일반적으로 함수 $f(x)$가 정의역 전체에서 연속일 때, 함수 $f(x)$를 **연속함수**라고 한다.

반열린 구간이나 구간 $[a, \infty)$, $(-\infty, a]$에서의 함수의 연속도 마찬가지 방법으로 정한다.

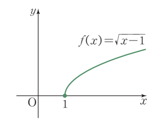
교과서 70 쪽

예를 들어 함수 $f(x)=\sqrt{x-1}$은

(i) 구간 $(1, \infty)$에서 연속이고

(ii) $\lim_{x\to 1+} f(x)=f(1)$

이므로 함수 $f(x)$는 구간 $[1, \infty)$에서 연속이다.

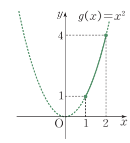


또 함수 $g(x)=x^2$은

(i) 열린 구간 $(1, 2)$에서 연속이고

(ii) $\lim_{x\to 1+} g(x)=g(1)$, $\lim_{x\to 2-} g(x)=g(2)$

이므로 함수 $g(x)$는 구간 $[1, 2]$에서 연속이다.



문제 3 다음 함수가 연속인 구간을 구하여라.

(1) $f(x)=x^2-3x-4$ (2) $f(x)=\sqrt{2x+3}$ (3) $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$

예제 02 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}}{x^{2n}+1}$의 연속성을 조사하여라.

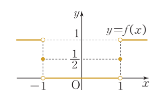
풀이 x의 값에 따라 구간을 나누어 함수 $f(x)$를 구하면 다음과 같다.

(i) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$이므로 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}}{x^{2n}+1}=0$

(ii) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\infty$이므로 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}}{x^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=1$

(iii) $|x|=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$이므로 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}}{x^{2n}+1}=\frac{1}{2}$

$$f(x)=\begin{cases}0 & (|x|<1)\\ 1 & (|x|>1)\\ \frac{1}{2} & (|x|=1)\end{cases}$$



따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$, $x=-1$에서 불연속이고, 그 밖의 모든 점에서 연속이다.

답 $x=1$, $x=-1$에서 불연속, 그 밖의 모든 점에서 연속

문제 4 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n-1}{x^n+1}$의 연속성을 조사하여라.

2

목표| 함수의 정의역을 구간을 이용하여 나타낼 수 있게 한다.

풀이| (1) $x\ne1$인 실수 전체의 집합이 정의역이므로

$(-\infty,\ 1)\cup(1,\ \infty)$

(2) $4-x^2\ge0$이 정의역이므로 $x^2-4\le0$에서 $-2\le x\le2$

즉, $[-2,\ 2]$

3

목표| 주어진 함수가 연속인 구간을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $(-\infty,\ \infty)$

(2) $f(x)=\sqrt{2x+3}$은 $\left[-\frac{3}{2},\ \infty\right)$에서 연속이고

$\lim_{x\to-\frac{3}{2}} f(x)=f\left(-\frac{3}{2}\right)=0$이므로

함수 $f(x)$가 연속인 구간은 $\left[-\frac{3}{2},\ \infty\right)$이다.

(3) $x\ne1$인 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$(-\infty,\ 1)\cup(1,\ \infty)$

4

목표| 거듭제곱 꼴이 있는 분수함수의 연속성을 조사할 수 있게 한다.

풀이| (i) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n-1}{x^n+1}=-1$$

(ii) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n-1}{x^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^n}}{1+\frac{1}{x^n}}=1$$

(iii) $x=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=1$이므로 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n-1}{x^n+1}=0$

(iv) $x=-1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=\pm1$이므로 $f(x)$의 값은 0 또는 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$, $x=-1$에서 불연속이고, 그 밖의 모든 점에서 연속이다.

5

목표| 분수함수의 극한에 대한 성질을 활용하여 함수의 연속과 관련된 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로

$\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$에서

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}+a}{x-1}=b \qquad \cdots\cdots ①$$

$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}+a}{x-1}$의 값이 존재하고

$\lim_{x\to1}(x-1)=\lim_{x\to1}(\sqrt{x+3}+a)=0$이므로

$2+a=0$에서 $a=-2$

$a=-2$를 ①에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$
$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}\right)=\frac{1}{4}=b$$

따라서 $\boldsymbol{a=-2,\ b=\frac{1}{4}}$

교과서 71 쪽

예제 03 함수 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-ax+2}{x-2} & (x\neq2)\\ b & (x=2)\end{cases}$가 모든 실수 x에서 연속이 되도록 하는 실수 a, b의 값을 구하여라.

풀이 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=2$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$에서 $\lim_{x\to2}\frac{x^2-ax+2}{x-2}=b$ ...... ①

$\lim_{x\to2}\frac{x^2-ax+2}{x-2}$의 값이 존재하고 $\lim_{x\to2}(x-2)=0$이므로

$\lim_{x\to2}(x^2-ax+2)=0$에서 $a=3$

$a=3$을 ①에 대입하면

$\lim_{x\to2}\frac{x^2-3x+2}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x-1)}{x-2}=\lim_{x\to2}(x-1)=1=b$

따라서 $a=3$, $b=1$

답 $a=3$, $b=1$

문제 5 함수 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+3}+a}{x-1} & (x\neq1)\\ b & (x=1)\end{cases}$가 모든 실수 x에서 연속이 되도록 하는 실수 a, b의 값을 구하여라.

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

근로 소득세 부과의 불합리한 면을 보완하기 위하여 국세청에서는 '누진 공제' 방법을 사용하여 세금을 부과하고 있다. 즉, 오른쪽 표와 같이 과세 표준 금액에서 누진 공제 금액 만큼을 빼서 세액이 급격하게 변화하지 않도록 하고 있다.

과세 표준 금액	세율	누진 공제
1200만 원 이하	6 %	–
1200만 원 초과 4600만 원 이하	15 %	108만 원
4600만 원 초과 8800만 원 이하	24 %	k만 원
8800만 원 초과 3억 원 이하	35 %	490만 원
3억 원 초과	38 %	900만 원

(세액)=(과세 표준 금액)×(세율)−(누진 공제)

과세 표준 금액을 x만 원, 세액을 $f(x)$만 원이라고 할 때, 물음에 답하여라.

(1) 함수 $f(x)$를 구하여라.

(2) 함수 $f(x)$가 $x=1200$에서 연속인지 불연속인지 조사하여라.

(3) 함수 $f(x)$가 $x=4600$에서 연속이 되도록 하는 상수 k의 값을 구하여라.

단원 과제

목표| 과세 표준 금액에 대한 세금 액수를 결정하는 함수가 세율 변동의 경계에 있는 과세 표준 금액에서도 연속이 되도록 하는 누진공제 금액을 결정할 수 있게 한다.

풀이|

$$\text{(1) } \boldsymbol{f(x)=\begin{cases}\frac{6}{100}x & (x\le1200)\\ \frac{15}{100}x-108 & (1200<x\le4600)\\ \frac{24}{100}x-k & (4600<x\le8800)\\ \frac{35}{100}x-490 & (8800<x\le30000)\\ \frac{38}{100}x-900 & (x>30000)\end{cases}}$$

(2) $f(1200)=\frac{6}{100}\cdot1200=72$

$\lim_{x\to1200+}f(x)=72$, $\lim_{x\to1200-}f(x)=72$

$\lim_{x\to1200}f(x)=f(1200)$이므로

$x=1200$에서 **연속이다.**

(3) $f(4600)=\frac{15}{100}\cdot4600-108=582$

$\lim_{x\to4600+}f(x)=1104-k$, $\lim_{x\to4600-}f(x)=582$

함수 $f(x)$가 $x=4600$에서 연속이므로

$\lim_{x\to4600}f(x)=f(4600)$, $1104-k=582$, $k=\mathbf{522}$

읽/기/자/료 연말정산

연말정산(年末精算)은 급여(給與)소득에서 원천징수한 세액(稅額)의 과부족을 연말에 정산하는 일을 말한다.

원천징수는 1년 내내 같은 금액의 급여가 지급된다는 전제 아래 세액을 산출하는데, 실제로는 잔업(殘業)·상여(賞與)·부양가족 등에 따라 변동이 있으며, 또한 각종 소득공제신고(보험료공제·의료비공제·근로학생공제·배우자공제·부양가족공제 ·장애인공제)는 12월분의 급여지급 전에 하게 되어 있으므로, 연세액(年稅額)과 원천징수세액 사이에는 차액이 생기게 마련이다. 과납분(過納分)은 그해 마지막 급여의 소득세 계산에 충당하며, 부족분은 징수하도록 되어 있다.

근로소득세액의 연말정산에 관하여는 소득세법 제152~156조에 상세히 규정되어 있다.

교과서 72 쪽

02 연속함수의 성질

● 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

연속함수에 대한 성질은 어떠한가?

탐구 활동 두 함수 $f(x)=x^2$, $g(x)=x-1$은 $x=1$에서 연속이다. 다음 세 학생의 의견 중 잘못된 의견을 찾고, 그 이유를 설명하여 보자.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a),\ \lim_{x\to a} g(x)=g(a)$$

이므로 함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to a} cf(x)=c\lim_{x\to a} f(x)=cf(a) \text{ (단, } c\text{는 상수)}$$

$$\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)=f(a)+g(a)$$

$$\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)=f(a)-g(a)$$

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)=f(a)g(a)$$

가 성립한다. 특히 $g(a)\neq 0$이면

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}=\frac{f(a)}{g(a)}$$

가 성립한다.

따라서 함수 $cf(x)$, $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$도 $x=a$에서 연속이다.

새로 나온 용어와 기호

- 최대 · 최소 정리(最大最小定理, maximum-minium theorem)
- 사이값 정리(intermediate value theorem)

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 한 점에서 연속인 두 함수에 대하여 합, 곱, 몫에 의하여 새로이 만들어지는 함수의 연속을 조사해 봄으로써 연속함수의 성질을 이해하기 위한 것이다.

틀린 부분: $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^2}{x-1}$도 $x=1$에서 연속이야.

이유: $x=1$일 때, $g(x)=0$이므로 분모가 0이 되어 함숫값 $\frac{f(0)}{g(0)}$이 존재하지 않는다.

02 연속함수의 성질

소단원 지도 목표

① 연속함수의 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있게 한다.

② 최대 · 최소 정리를 이해하고, 닫힌 구간에서 함수의 최댓값과 최솟값을 각각 구할 수 있게 한다.

③ 사이값 정리를 이해하고, 이를 활용하여 방정식의 실근이 존재하는 범위를 판별할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 함수의 극한의 성질을 이용하여 연속함수의 성질을 이해하게 한다.

2. 최대 · 최소 정리와 사이값 정리는 함수의 그래프를 이용하여 직관적으로 이해하게 한다.

3. 최대 · 최소 정리는 함수가 닫힌 구간에서 연속일 때 성립하며, 연속이 아니거나 열린 구간에서는 성립하지 않음에 유의하여 지도한다.

지/도/자/료 균등 연속(Uniformly continuous)

임의의 구간에서 정의된 함수 f에서 임의의 양수 $\varepsilon>0$에 대하여 적당한 $\delta>0$이 존재하여 그 구간의 임의의 두 점 x_1, x_2가 $|x_1-x_2|<\delta$이면 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$을 만족할 때, 함수 $f(x)$를 그 구간에서 균등 연속이라고 한다.

예를 들어, 함수 $f(x)=x$는 실수 전체에서 연속이다. 위의 정의에 의하여 함수 $f(x)$가 균등 연속임을 증명하면 다음과 같다.

임의의 양수 $\varepsilon>0$에 대하여 적당한 $\varepsilon=\delta$가 존재하여 두 실수 x, y가 $|x-y|<\delta$이면

$|f(x)-f(y)|=|x-y|<\delta=\varepsilon$

이므로 함수 $f(x)$는 균등 연속이다.

그러나 연속이라고 해서 반드시 균등 연속인 것은 아니다.

예를 들어, 구간 $(0,\ 1)$에서 함수 $f(x)=\frac{1}{x}$은 연속이지만 균등 연속은 아니다.

본문 해설

❶ 다항함수는 모든 실수에서 연속이다.

임의의 다항식

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0$$

에서 임의의 실수 a에 대하여

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}f(x)&=\lim_{x\to a}(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0)\\&=\lim_{x\to a}a_nx^n+\lim_{x\to a}a_{n-1}x^{n-1}+\lim_{x\to a}a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+\lim_{x\to a}a_1x+\lim_{x\to a}a_0\\&=a_na^n+a_{n-1}a^{n-1}+a_{n-2}a^{n-2}+\cdots+a_1a+a_0\\&=f(a)\end{aligned}$$

이므로 다항함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 연속이다.

❷ 분수함수 $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$에서 분모인 $g(x)$가 다항함수이므로 임의의 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a}g(x)=g(a)$이고, $g(a)\neq 0$이면

$$\lim_{x\to a}h(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(a)}{g(a)}=h(a)$$

이다. 따라서 분수함수 $h(x)$는 $x=a$에서 연속이다. 즉, $g(x)\neq 0$인 모든 실수 x에 대하여 연속이다.

1

목표| 주어진 함수의 연속성을 조사할 수 있게 한다.

풀이| (1) $f(x)=-x^2+4$는 다항함수이므로 모든 실수에서 연속이다.

(2) $f(x)=(3x+1)(x^3-2)$는 다항함수이므로 모든 실수에서 연속이다.

(3) $f(x)=\dfrac{2x}{x+2}$는 유리함수이므로 **$x\neq -2$인 모든 실수에서 연속이다.**

교과서 73 쪽

이상을 정리하면 다음과 같다.

연속함수의 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면 다음 함수도 모두 $x=a$에서 연속이다.

(1) $cf(x)$ (단, c는 상수)　　(2) $f(x)\pm g(x)$

(3) $f(x)g(x)$　　(4) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (단, $g(a)\neq 0$)

❶ 일차함수 $y=x$는 모든 실수에서 연속이므로 연속함수의 성질 (3)에 의하여 이 함수의 곱으로 나타나는 함수

$$y=x^2,\ y=x^3,\ \cdots,\ y=x^n\ (n\text{은 자연수})$$

도 모든 실수에서 연속이다.

따라서 연속함수의 성질 (1), (2)에 의하여 이들 함수에 상수를 곱하여 더한 다항함수

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\ (a_n,\ a_{n-1},\ \cdots,\ a_1,\ a_0\text{은 상수})$$

도 모든 실수에서 연속이다.

❷ 또 유리함수는 두 다항식의 몫

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}\ (P(x),\ Q(x)\text{는 다항식})$$

의 꼴로 나타나므로 연속함수의 성질 (4)에 의하여 분모를 0으로 하는 x의 값을 제외한 모든 실수에서 연속이다.

보기　(1) 함수 $f(x)=x^2-2x-3$은 모든 실수에서 연속이다.

(2) 함수 $g(x)=\dfrac{2x}{x+1}$는 $x\neq -1$인 모든 실수에서 연속이다.

문제 **1** 다음 함수의 연속성을 조사하여라.

(1) $f(x)=-x^2+4$　　(2) $f(x)=(3x+1)(x^3-2)$　　(3) $f(x)=\dfrac{2x}{x+2}$

사고력 기르기

추론
▸의사소통
문제 해결

유리함수 중 실수 전체의 집합에서 연속인 예를 말하여 보자.

사고력 기르기 의사소통

출제 의도| 실수 전체의 집합에서 연속인 유리함수의 예를 말할 수 있도록 한다.

풀이| $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$이라고 하면 모든 실수 x에 대하여 $x^2+1\neq 0$이므로 **함수 $f(x)$는 모든 실수에서 연속이다.**

지/도/자/료 합성함수의 연속

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이고, 함수 $g(x)$가 $x=f(a)$에서 연속이면 합성함수 $g(f(x))$는 $x=a$에서 연속임을 알아보자.

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이므로 $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$이다.

$\lim_{x\to a}g(f(x))$에서 $f(x)=t$로 놓으면 $x\to a$일 때, $t\to f(a)$이고 함수 $g(x)$가 $x=f(a)$에서 연속이므로

$\lim_{x\to a}g(f(x))=\lim_{t\to f(a)}g(t)=g(f(a))$이다.

따라서 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이고, 함수 $g(x)$가 $x=f(a)$에서 연속이면 합성함수 $g(f(a))$는 $x=a$에서 연속이다.

교과서 74 쪽

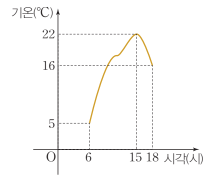
최대 · 최소 정리란 무엇인가?

탐구 활동

오른쪽 그래프는 어느 날 오전 6시부터 오후 6시까지 12시간 동안 기온 변화를 측정하여 나타낸 것이다. 다음 물음에 답하여 보자.

1. 기온이 최대일 때의 시각과 온도를 말하여 보자.

2. 기온이 최소일 때의 시각과 온도를 말하여 보자.

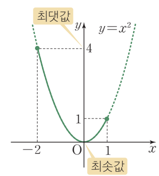


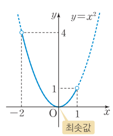
위의 그래프에서 기온은 측정 시각에 따라 연속적으로 변하므로 일정한 범위에서 반드시 최댓값과 최솟값을 가진다.

이를테면 닫힌 구간 $[-2, 1]$에서 연속인 함수 $f(x)=x^2$은 이 구간에서 $x=-2$일 때 최댓값 4를 가지고, $x=0$일 때 최솟값 0을 가진다.

한편 열린 구간 $(-2, 1)$에서 함수 $f(x)=x^2$은 이 구간에서 최댓값은 갖지 않고 최솟값만을 가진다.

일반적으로 닫힌 구간에서 연속인 함수에 대하여 다음과 같은 **최대 · 최소 정리**가 성립한다.

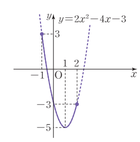




1 ● 닫힌 구간이 아닌 구간에서 정의된 연속함수는 최댓값과 최솟값을 갖지 않을 수도 있다.

> **최대 · 최소 정리**
>
> 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이면, $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 가진다.

보기 닫힌 구간 $[-1, 2]$에서 함수 $f(x)=2x^2-4x-3$은 연속이므로 최댓값과 최솟값을 가진다.
즉, 치역이 닫힌 구간 $[-5, 3]$이므로 $x=-1$일 때 최댓값은 3이고, $x=1$일 때 최솟값은 -5이다.



문제 2 다음 주어진 구간에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

(1) $f(x)=-x^2-2x+3$ $[-2, 1]$ (2) $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$ $[2, 5]$

(3) $f(x)=\sqrt{2-x}$ $[-3, 2]$

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 기온과 같이 일정한 범위의 측정시간에 따라 연속적으로 변화하는 양에서 최댓값과 최솟값을 각각 구해볼 수 있도록 하기 위한 것이다.

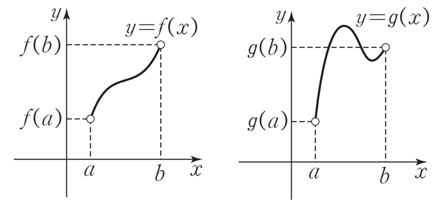
1. 기온은 **15**시에 **22**℃로 최대이다.

2. 기온은 **6**시에 **5**℃로 최소이다.

본문 해설

1 최대 · 최소 정리는 바이어슈트라스(Weierstrass, K. T. W.; 1815~1897)가 공식화하였다. 최대 · 최소 정리는 닫힌 구간에서 함수 $f(x)$가 연속일 때에만 성립함이 알려져 있고, 닫힌 구간이 아닌 경우에는 연속함수이더라도 최댓값 또는 최솟값을 가지지 않을 수도 있다.

예를 들어 아래의 그림과 같이 열린 구간 (a, b)에서 정의된 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$에서 $f(x)$는 최댓값과 최솟값을 모두 갖지 않고, $g(x)$는 최댓값은 갖지만 최솟값은 갖지 않는다.



또 $x=3$에서 불연속인 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (3\le x\le 5) \\ -2x+1 & (0\le x<3) \end{cases}$$

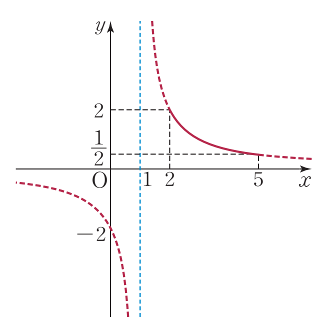
는 닫힌 구간 $[0, 5]$에서 정의되어 있지만, 이 구간에서 최솟값을 가지지 않는다.

2

목표 | 주어진 구간에서 함수의 최댓값과 최솟값을 각각 구할 수 있게 한다.

풀이 (1) 닫힌 구간 $[-2, 1]$에서 함수
$f(x)=-x^2-2x+3$은 연속이므로
$f(x)=-(x+1)^2+4$
$x=-1$일 때 **최댓값은 4**이고, $x=1$일 때 **최솟값은 0**이다.

(2) 함수 $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$는 $x=1$에서 불연속이며 그래프를 그려 보면 오른쪽 그림과 같고 닫힌 구간 $[2, 5]$에서는 연속이므로 $x=2$일 때 **최댓값은 2**이고,
$x=5$일 때 **최솟값은 $\dfrac{1}{2}$**이다.



(3) 닫힌 구간 $[-3, 2]$에서 함수 $f(x)=\sqrt{2-x}$는 연속이므로 $x=-3$일 때 **최댓값은 $\sqrt{5}$**이고, $x=2$일 때 **최솟값은 0**이다.

교과서 75 쪽

사이값 정리란 무엇인가?

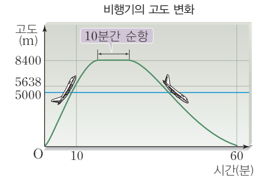
탐구 활동

김포 공항에서 제주 공항까지 가는 비행기에 탑승한 채영이는 이륙 후 기내의 화면에서 현재 고도가 5638 m임을 확인하였다. 다음 물음에 답하여 보자.

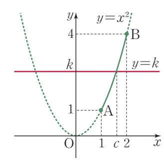
1. 이륙 후부터 착륙 시까지 비행기의 고도는 연속적으로 변하겠는가?
2. 착륙 시까지 비행기의 고도가 5000 m인 순간이 반드시 있다고 할 수 있는지 말하여 보자.

비행기의 고도는 연속적으로 변하므로 시간에 따른 고도의 그래프는 연속이다. 따라서 현재 고도가 5638 m이므로 이륙 후 5000 m인 순간과 착륙 전 5000 m인 순간이 반드시 존재한다고 할 수 있다.

비행기의 고도 변화



이를테면 함수 $f(x)=x^2$은 닫힌 구간 $[1, 2]$에서 연속이므로 이 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 두 점 $A(1, 1)$, $B(2, 4)$ 사이에서 이어져 있다.



따라서 $1<k<4$인 임의의 k에 대하여 x축에 평행한 직선 $y=k$는 이 그래프와 적어도 한 점에서 만난다.

즉, 1과 4 사이의 임의의 값 k에 대하여 $f(c)=k$인 c가 열린 구간 $(1, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

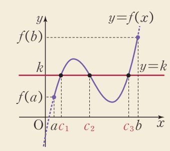
일반적으로 닫힌 구간에서 연속인 함수에 대하여 다음과 같은 **사이값 정리**가 성립한다.

❶ **사이값 정리**

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$이면, $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여

$$f(c)=k \ (a<c<b)$$

인 c가 적어도 하나 존재한다.



탐구 활동의 이해

활동 목표 • 비행기의 고도와 같이 연속적으로 변화하는 양의 구체적인 예를 통해 사이값 정리에 대한 의미를 이해하도록 하기 위한 것이다.

1. 비행기의 고도는 지상부터 최대 높이까지 **연속적으로 변한다.**

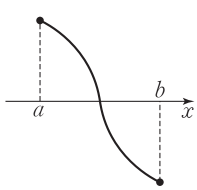
2. 비행기의 현재 고도가 5638 m이므로 이륙 후 5000 m인 순간과 착륙 전 **5000 m인 순간이 반드시 존재한다고 할 수 있다.**

본문 해설

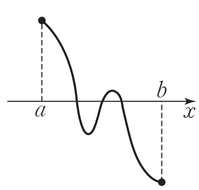
❶ (1) 사이값 정리에서 $f(a) \neq f(b)$의 조건은 중요한 조건이 아님을 이해하도록 한다. 즉, 다음과 같은 사이값 정리에 대한 다른 형태를 간단히 설명한다.

> 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이면, $f(a) \le k \le f(b)$ 또는 $f(b) \le k \le f(a)$인 임의의 값 k에 대하여 $f(c)=k(a \le c \le b)$인 c가 적어도 하나 존재한다.

(2) 사이값 정리는 방정식에서 근의 존재성을 확인할 수 있을 뿐, 방정식의 근의 개수를 알 수는 없다.



[그림 1]



[그림 2]

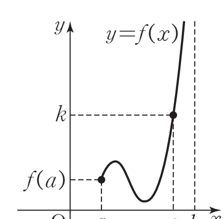
위의 두 그림을 보면 모두 사이값 정리를 만족하는데, [그림 1]에서는 1개의 근, [그림 2]에서는 3개의 근을 갖는다. 이처럼 사이값 정리만으로는 주어진 구간에서 적어도 하나의 근이 존재한다는 사실을 확인할 수 있을 뿐이다.

(3) 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 $f(a)f(b)<0$이면 방정식 $f(x)=0$은 열린 구간 (a, b)에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 이해하도록 한다.

또, 이와 같은 내용으로 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 $f(a)f(b) \le 0$이면 방정식 $f(x)=0$은 구간 $[a, b]$에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 간단히 언급하도록 한다.

한편, 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 $f(a)f(b)>0$인 경우 방정식 $f(x)=0$이 구간 (a, b)에서 실근을 가질 수도 있음을 주의한다. 즉, 역이 성립하지 않음을 설명한다.

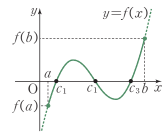
(4) 사이값 정리는 정의역이 닫힌 구간인 경우에만 성립하는 것은 아니다.



예를 들어 함수 $f(x)$가 반닫힌 구간 $[a, b)$에서 연속이고 $f(b)=\infty$이면 $f(a)<k$인 임의의 실수 k에 대하여 $f(c)=k$를 만족하는 c가 열린 구간 (a, b) 사이에 적어도 하나 존재한다.

교과서 76 쪽

특히 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)$와 $f(b)$의 부호가 서로 다르면, $f(c)=0$인 c가 열린 구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다. 즉, 방정식 $f(x)=0$은 열린 구간 (a, b)에서 적어도 하나의 실근을 가진다.



예제 01 방정식 $x^3+3x-2=0$은 열린 구간 $(0, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 보여라.

풀이 $f(x)=x^3+3x-2$라고 하면 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[0, 1]$에서 연속이고

$$f(0)=-2<0,\ f(1)=2>0$$

이므로 사이값 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린 구간 $(0, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

즉, 방정식 $x^3+3x-2=0$은 열린 구간 $(0, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 가진다.

문제 3 다음 방정식이 주어진 구간에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 보여라.

(1) $x^3-3x+1=0$ $(1, 2)$ (2) $\frac{3}{x}-5x+1=0$ $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

발전

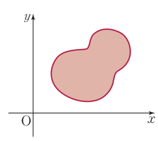
문제 4 다음 물음에 답하여라.

(1) 열린 구간에서 연속이지만, 최댓값 또는 최솟값을 갖지 않는 예를 찾아라.

(2) 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)$와 $f(b)$의 부호가 같을 때, $f(c)=0$인 c가 열린 구간 (a, b)에 존재하는지 설명하여라.

창의 up

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 도형이 있다. 이 도형의 넓이를 y축과 평행한 직선으로 이등분할 수 있는지를 사이값 정리를 이용하여 설명하여라.



4

목표| 사이값 정리를 이용하여 여러 가지 조건에 맞는 함수의 예를 들어볼 수 있게 한다.

풀이| (1) ㉠ 함수 $f(x)=x^2-2x$는 열린 구간 $(0, 5)$에서 연속이지만 최댓값은 존재하지 않고, $x=1$일 때 최솟값은 -1이다.

(2) ㉠ 함수 $f(x)=x^2-2x+3$은 닫힌 구간 $[0, 4]$에서 연속이고 $f(0)=3>0$, $f(4)=11>0$이므로 부호가 같고 $f(c)=0$인 c가 열린 구간 $(0, 4)$에 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)$와 $f(b)$의 부호가 같을 때 $f(c)=0$인 c가 열린 구간 (a, b)에 존재한다고 할 수 없다.

3

목표| 사이값 정리를 이용하여 방정식이 주어진 구간에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 보일 수 있게 한다.

풀이| (1) $f(x)=x^3-3x+1$이라고 하면 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[1, 2]$에서 연속이고 $f(1)=-1<0$, $f(2)=3>0$이므로 사이값 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린 구간 $(1, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $x^3-3x+1=0$은 열린 구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 가진다.

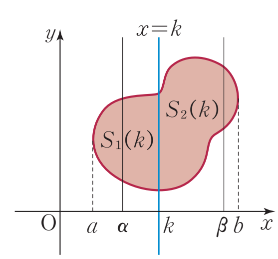
(2) $f(x)=\frac{3}{x}-5x+1$이라고 하면 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$에서 연속이고 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{2}>0$, $f(1)=-1<0$이므로 사이값 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린 구간 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $\frac{3}{x}-5x+1=0$은 열린 구간 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$에서 적어도 하나의 실근을 가진다.

창의 UP

출제 의도| 사이값 정리를 이용하여 임의의 도형의 넓이를 이등분할 수 있음을 보일 수 있게 한다.

풀이| 오른쪽 그림에서 직선 $x=k(a\le k\le b)$의 왼쪽에 있는 도형의 넓이를 $S_1(k)$, 직선 $x=k$의 오른쪽에 있는 도형의 넓이를 $S_2(k)$라고 하자.



$f(x)=S_2(k)-S_1(k)$라 두면 $f(x)$는 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(\alpha)=S_2(\alpha)-S_1(\alpha)>0$, $f(\beta)=S_2(\beta)-S_1(\beta)<0$이므로 사이값 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린 구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다. 즉, 주어진 도형을 넓이가 똑같은 두 개의 도형으로 나누는 직선 $x=c$가 존재한다.

중/단/원 기초

1

목표| 함수의 연속의 뜻을 이해하게 한다.

풀이| (1) $\lim_{x\to 0-} f(x)=1$, $\lim_{x\to 0+} f(x)=2$이고 $\lim_{x\to 0} f(x)$가 존재하지 않는다.

(2) $f(0)=2$, $\lim_{x\to 0} f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to 0} f(x)\neq f(0)$

2

목표| 주어진 함수가 연속인 x값의 범위를 구간의 기호로 나타낼 수 있게 한다.

풀이| (1) $5-x\geq 0$에서 연속이므로 $(-\infty,\ 5]$

(2) $x\neq -1$인 실수 전체에서 연속이므로 $(-\infty,\ -1)\cup(-1,\ \infty)$

(3) 실수 전체에서 연속이므로 $(-\infty,\ \infty)$

3

목표| 연속함수의 성질을 이용하여 연속인 x값의 범위를 구간의 기호로 나타낼 수 있게 한다.

풀이| (1) $2f(x)+g(x)$는 다항함수이므로 실수 전체에서 연속이다. 따라서 $(-\infty,\ \infty)$

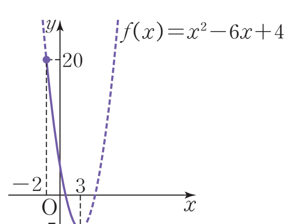
(2) $f(x)g(x)$는 다항함수이므로 실수 전체에서 연속이다. 따라서 $(-\infty,\ \infty)$

(3) $g(x)=(x-1)(x-2)\neq 0$, 즉 $x\neq 1$, $x\neq 2$인 실수 전체에서 연속이다. 따라서 $(-\infty,\ 1)\cup(1,\ 2)\cup(2,\ \infty)$

4

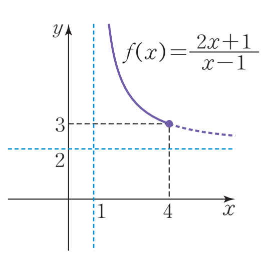
목표| 함수의 최댓값과 최솟값을 각각 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $x=-2$일 때 최댓값은 20이고, $x=3$일 때 최솟값은 -5이다.



(2) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}=2+\dfrac{3}{x-1}$

따라서 닫힌 구간 $[1,\ 4]$에서 최댓값은 존재하지 않고, $x=4$일 때 최솟값은 3이다.



교과서 77 쪽

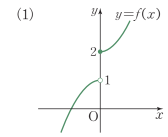
중단원 기초

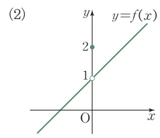
[해답 p.198]

수준별 학습

1 다음 함수가 $x=0$에서 연속이 아닌 이유를 설명하여라. — 01 함수의 연속

(1) (2)





2 다음 함수가 연속인 x값의 범위를 구간의 기호로 나타내어라. — 01 함수의 연속

(1) $f(x)=\sqrt{5-x}$　(2) $f(x)=\dfrac{2}{x+1}$　(3) $f(x)=2$

3 두 함수 $f(x)=x+1$, $g(x)=x^2-3x+2$에 대하여 다음 함수가 연속인 x값의 범위를 구간의 기호로 나타내어라. — 02 연속함수의 성질

(1) $2f(x)+g(x)$　(2) $f(x)g(x)$　(3) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

4 다음 함수가 주어진 구간에서 최댓값과 최솟값을 가지면 그 값을 구하여라. — 02 연속함수의 성질 최대 · 최소 정리

(1) $f(x)=x^2-6x+4$　$[-2,\ 3]$

(2) $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$　$[1,\ 4]$

5 다음 방정식이 주어진 구간에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 보여라. — 02 연속함수의 성질 사이값 정리

(1) $x^3+3x-2=0$　$(-1,\ 1)$

(2) $x^4+x^3-8x+1=0$　$(1,\ 2)$

5

목표| 사이값 정리를 이용하여 방정식이 주어진 구간에서 적어도 하나의 실근을 가짐을 보일 수 있게 한다.

풀이| (1) $f(x)=x^3+3x-2$라고 하면 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[-1,\ 1]$에서 연속이고

$f(-1)=-6<0$, $f(1)=2>0$

이므로 사이값 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린 구간 $(-1,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $x^3+3x-2=0$은 열린 구간 $(-1,\ 1)$에서 적어도 하나의 실근을 가진다.

(2) $f(x)=x^4+x^3-8x+1$이라고 하면 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[1,\ 2]$에서 연속이고

$f(1)=-5<0$, $f(2)=9>0$

이므로 사이값 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린 구간 $(1,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $x^4+x^3-8x+1=0$은 열린 구간 $(1,\ 2)$에서 적어도 하나의 실근을 가진다.

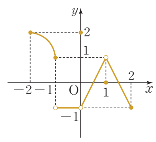
교과서 78 쪽

중단원 기본

[해답 p.199]

수준별 학습

1 $-2\le x\le 2$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 이 구간에서 함수 $f(x)$의 극한값이 존재하지 않는 점의 개수를 a, $f(x)$가 불연속인 점의 개수를 b라 할 때, $a+b$의 값을 구하여라.



01 함수의 연속

2 함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} & (x\neq 0) \\ a & (x=0) \end{cases}$

가 $x=0$에서 연속이 되도록 상수 a의 값을 구하여라.

01 함수의 연속

3 함수 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+1}+a}{x^n+1}$가 $x=1$에서 연속이 되도록 상수 a의 값을 구하여라.

01 함수의 연속

4 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속일 때, 다음 함수 중 $x=a$에서 항상 연속인 함수의 개수를 구하여라. (단, $g(a)\neq 0$이고 $g(x)$의 치역은 $f(x)$의 정의역에 포함된다.)

㉠ $f(x)-2g(x)$	㉡ $\{f(x)\}^2$
㉢ $\dfrac{f(x)}{g(x)}$	㉣ $f(g(x))$

02 연속함수의 성질

5 방정식 $x^2-2x+k=0$이 구간 $(1,\ 3)$에서 실근을 갖도록 하는 실수 k값의 범위를 구하여라.

02 연속함수의 성질
사이값 정리

중/단/원 기본

1

목표| 함수의 극한과 연속을 각각 조사할 수 있게 한다.

풀이| (i) $\lim\limits_{x\to-1-}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to-1+}f(x)=-1$이므로

$x=-1$에서 극한값이 존재하지 않는다.

따라서 $a=1$

(ii) 극한값 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)$가 존재하지 않으므로

$x=-1$에서 $f(x)$는 불연속이다.

함숫값 $f(0)$이 존재하지 않으므로 $x=0$에서 $f(x)$는 불연속이다.

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=1$이고 $f(1)=0$이므로 $x=1$에서 $f(x)$는 불연속이다.

따라서 $b=3$

(i), (ii)에서 $a+b=\mathbf{4}$

2

목표| 함수의 연속의 뜻을 이용하여 주어진 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=1$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이면

$f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)$이므로 $\mathbf{a=1}$

3

목표| 함수의 연속의 뜻을 이용하여 주어진 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| (i) $x>1$일 때 $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=\infty$이므로

$f(x)=x$

(ii) $-1<x<1$일 때 $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$이므로

$f(x)=a$

(iii) $x=1$일 때 $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=1$이므로

$f(x)=\dfrac{1+a}{2}$

$\lim\limits_{x\to1-}a=\lim\limits_{x\to1+}x=\dfrac{1+a}{2}$에서 $\mathbf{a=1}$

4

목표| 연속함수의 성질을 이용하여 연속인 함수를 찾을 수 있게 한다.

풀이| ㉣ $\lim\limits_{x\to a}f(g(x))=f(g(a))$이므로 $f(g(x))$가 $x=a$에서 연속이려면 $f(x)$가 $x=g(a)$에서 연속이라는 조건이 필요하다.

따라서 ㉠, ㉡, ㉢의 **3개**

5

목표| 방정식이 주어진 구간에서 실근을 갖게 하는 조건을 찾을 수 있게 한다.

풀이| $f(x)=x^2-2x+k$라고 하면 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[1,\ 3]$에서 연속이고 $f(1)=k-1$, $f(3)=k+3$

이때 $f(1)f(3)<0$이면 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(1,\ 3)$에서 실근을 가진다.

$f(1)f(3)=(k-1)(k+3)<0$, $\mathbf{-3<k<1}$

중/단/원 실력

교과서 79 쪽

중단원 실력

[해답 p.199]

수준별 학습

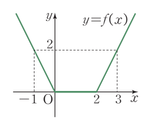
1 함수 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}+ax+b}{x^{2n}+1}$가 모든 실수 x에서 연속이 되도록 상수 a, b의 값을 구하여라. — 01 함수의 연속

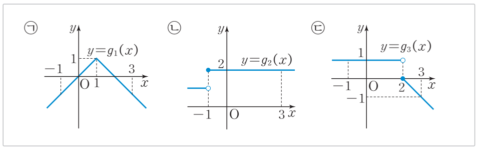
2 함수 $f(x)=x^2+\dfrac{x^2}{1+x^2}+\dfrac{x^2}{(1+x^2)^2}+\dfrac{x^2}{(1+x^2)^3}+\cdots$에 대하여 다음 물음에 답하여라. — 01 함수의 연속

(1) 함수 $f(x)$의 그래프를 그려라.

(2) 함수 $f(x)$가 불연속인 x의 값을 구하여라.

3 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음의 함수 $y=g_k(x)$ $(k=1,\ 2,\ 3)$의 그래프 중 함수 $y=f(x)g_k(x)$가 구간 $[-1,\ 3]$에서 연속이 되는 것을 모두 찾아라. — 02 연속함수의 성질





4 연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$를 만족시키고 $f(0)f(1)<0$, $f(2)f(3)<0$일 때, 방정식 $f(x)=0$은 적어도 몇 개의 실근을 갖는지 구하여라. — 02 연속함수의 성질 사이값 정리

1

목표| 주어진 함수가 모든 실수에서 연속이 되도록 하는 두 상수의 값을 결정할 수 있게 한다.

풀이| (i) $|x|>1$일 때 $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x+\dfrac{a}{x^{2n-1}}+\dfrac{b}{x^{2n}}}{1+\dfrac{1}{x^{2n}}}=x$$

(ii) $|x|<1$일 때 $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$이므로

$f(x)=ax+b$

(iii) $x=1$일 때 $\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=1$이므로

$f(x)=\dfrac{1+a+b}{2}$

(iv) $x=-1$일 때 $\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n+1}=-1$

이므로 $f(x)=\dfrac{-1-a+b}{2}$

$\lim\limits_{x\to1-}(ax+b)=\lim\limits_{x\to1+}x=\dfrac{1+a+b}{2}$이고,

$\lim\limits_{x\to-1-}x=\lim\limits_{x\to-1+}(ax+b)=\dfrac{-1-a+b}{2}$이다.

따라서 $\boldsymbol{a=1,\ b=0}$

2

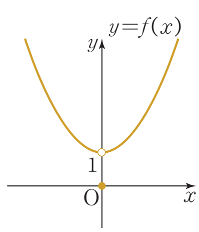
목표| 등비급수를 이용하여 불연속인 x의 값을 찾을 수 있게 한다.

풀이| $f(x)$는 첫째항이 x^2, 공비가 $\dfrac{1}{1+x^2}$인 등비급수이다.

(i) $x\neq0$이면 $f(x)=\dfrac{x^2}{1-\dfrac{1}{1+x^2}}=x^2+1$

(ii) $x=0$이면 $f(0)=0$

(1) 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2) 함수 $f(x)$는 $\boldsymbol{x=0}$에서 불연속이다.

3

목표| 연속함수의 성질을 이용하여 두 함수의 곱이 주어진 구간에서 연속이 되는 함수를 찾을 수 있게 한다.

풀이| ㉠ 구간 $[-1,\ 3]$에서 두 함수 $f(x)$, $g_1(x)$가 모두 연속이므로 함수 $f(x)g_1(x)$는 구간 $[-1,\ 3]$에서 연속이다.

㉢ $\lim\limits_{x\to2-}f(x)g_3(x)=0$, $\lim\limits_{x\to2+}f(x)g_3(x)=0$

$f(2)g_3(2)=0\cdot0=0$

함수 $f(x)g_3(x)$는 구간 $[-1,\ 3]$에서 연속이다.

따라서 연속이 되는 것은 ㉠, ㉢이다.

4

목표| 방정식이 실근을 갖는 구간을 찾을 수 있게 한다.

풀이| 연속함수 $f(x)$가 $f(0)f(1)<0$, $f(2)f(3)<0$이고 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$이므로 $f(0)f(-1)<0$, $f(-2)f(-3)<0$이다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(0,\ 1)$, $(2,\ 3)$, $(-1,\ 0)$, $(-3,\ -2)$에서 적어도 하나의 실근을 가지므로 적어도 **4개**의 실근을 갖는다.

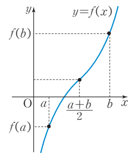
교과서 80 쪽

수행 과제

이분법(Bisection method)

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a)f(b)<0$이면, 사이값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$의 실근이 열린 구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

이때 열린 구간 (a, b)를 계속 절반으로 줄여가면서 사이값 정리를 이용하면 방정식 $f(x)=0$의 실근에 가까운 값을 구할 수 있다. 즉, 구간 $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$와 구간 $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$에 사이값 정리를 다시 한 번 적용하면 실근이 둘 중 적어도 한 곳에 반드시 있다고 말할 수 있다.



이와 같이 주어진 구간을 절반씩 나누어 반드시 실근이 존재하는 구간을 선택하는 과정을 반복하면 방정식 $f(x)=0$의 실근에 거의 가까운 값을 원하는 만큼 정확하게 구할 수 있다. 이런 방법을 이분법(Bisection method)이라고 한다.

예를 들어 $f(x)=x^3+3x-1$이라고 하면, 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[0, 1]$에서 연속이고 $f(0)=-1<0$, $f(1)=3>0$이므로 방정식 $x^3+3x-1=0$의 한 실근은 열린 구간 $(0, 1)$에 있다. 이때 다음 사실을 알 수 있다.

(1) $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}>0$이므로 이 실근은 열린 구간 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$에 있다.

(2) $f\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{15}{64}<0$이므로 이 실근은 열린 구간 $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$에 있다.

이와 같은 과정을 반복하면 주어진 방정식의 한 실근은 다음 구간에 있음을 알 수 있다.

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{8}\right), \left(\frac{5}{16}, \frac{3}{8}\right), \left(\frac{5}{16}, \frac{11}{32}\right), \left(\frac{5}{16}, \frac{21}{64}\right), \cdots$$

| 과 제 | **1** 방정식 $x^3-2x-3=0$은 열린 구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 가진다. 이분법을 세 번 이용하여 방정식 $x^3-2x-3=0$의 실근이 존재하는 구간을 구하여라.

교과서 81 쪽

대단원 학습 내용 정리

① 함수의 극한의 뜻

함수의 극한

함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 α에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 α에 수렴한다고 하고, α를 x의 값이 a에 한없이 가까워질 때의 함수 $f(x)$의 극한값 또는 극한이라고 하며, 기호로

$$\lim_{x \to a} f(x)=\alpha \quad \text{또는} \quad x \to a\text{일 때 } f(x) \to \alpha$$

와 같이 나타낸다.

좌극한과 우극한

(1) x의 값이 a보다 작으면서 a에 한없이 가까워질 때, 함수 $f(x)$의 극한값 α를 $\lim_{x \to a-} f(x)=\alpha$와 같이 나타내고, α를 $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 좌극한이라고 한다.

(2) x의 값이 a보다 크면서 a에 한없이 가까워질 때, 함수 $f(x)$의 극한값 β를 $\lim_{x \to a+} f(x)=\beta$와 같이 나타내고, β를 $x=a$에서의 함수 $f(x)$의 우극한이라고 한다.

② 함수의 극한에 대한 성질

함수의 극한에 대한 성질

$\lim_{x \to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x \to a} g(x)=\beta$($\alpha$, β는 실수)일 때

(1) $\lim_{x \to a} cf(x)=c\alpha$ (단, c는 상수)

(2) $\lim_{x \to a} \{f(x)+g(x)\}=\alpha+\beta$

(3) $\lim_{x \to a} \{f(x)-g(x)\}=\alpha-\beta$

(4) $\lim_{x \to a} f(x)g(x)=\alpha\beta$

(5) $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\alpha}{\beta}$ (단, $\beta \neq 0$)

함수의 극한의 대소 관계

$\lim_{x \to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x \to a} g(x)=\beta$ (α, β는 실수)일 때, a에 가까운 모든 x의 값에 대하여

(1) $f(x) \le g(x)$이면 $\alpha \le \beta$

(2) $f(x) \le h(x) \le g(x)$이고 $\alpha=\beta$이면 $\lim_{x \to a} h(x)=\alpha$

(3) $f(x)<g(x)$라고 해서 반드시 $\lim_{x \to a} f(x)<\lim_{x \to a} g(x)$가 성립하는 것은 아니다.

(4) $f(x)<h(x)<g(x)$라고 해서 반드시 $\lim_{x \to a} f(x)<\lim_{x \to a} h(x)<\lim_{x \to a} g(x)$가 성립하는 것은 아니다.

③ 함수의 연속

연속과 불연속

함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여

❶ 함숫값 $f(a)$가 정의되어 있다.

❷ 극한값 $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재한다.

❸ $\lim_{x \to a} f(x)=f(a)$

를 만족시키면 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라고 한다.

한편 함수 $f(x)$가 위의 세 조건 중 어느 하나라도 만족시키지 않으면 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이라고 한다.

④ 연속함수의 성질

연속함수의 성질

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면 다음 함수도 모두 $x=a$에서 연속이다.

(1) $cf(x)$ (단, c는 상수)

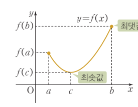
(2) $f(x) \pm g(x)$

(3) $f(x)g(x)$

(4) $\frac{f(x)}{g(x)}$ (단, $g(a) \neq 0$)

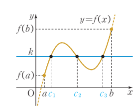
최대 · 최소 정리

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이면, $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 가진다.



사이값 정리

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$이면, $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여 $f(c)=k$ $(a<c<b)$인 c가 적어도 하나 존재한다.



| 용어와 기호 | 구간, 닫힌 구간, 열린 구간, 반닫힌(반열린) 구간, 좌극한, 우극한, 연속, 불연속, 연속함수, 최대 · 최소 정리, 사이값 정리, $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $\lim_{x \to a-} f(x)$, $\lim_{x \to a+} f(x)$, $\lim_{x \to a} f(x)$

수행 과제

● 수행 과제 의도

방정식 $f(x)=0$의 실근에 거의 가까운 값을 원하는 만큼 정확하게 구할 수 있는 이분법을 소개하고, 이분법과 사이값 정리와의 관련성을 이해시키기 위한 것이다.

과제 1 _풀이

$f(x)=x^3-2x-3$이라고 하면 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[1, 2]$에서 연속이고 $f(1)=-4<0$, $f(2)=1>0$이므로 방정식 $x^3-2x-3=0$의 한 실근은 열린 구간 $(1, 2)$에 있다. 이제 이분법을 사용하면

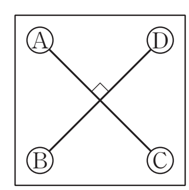
(1) $f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{21}{8}<0$이므로 이 실근은 $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$에 있다.

(2) $f\left(\frac{7}{4}\right)=-\frac{73}{64}<0$이므로 이 실근은 $\left(\frac{7}{4}, 2\right)$에 있다.

(3) $f\left(\frac{15}{8}\right)=-\frac{81}{512}<0$이므로 이 실근은 $\left(\frac{15}{8}, 2\right)$에 있다.

즉, 방정식 $x^3-2x-3=0$의 실근은 열린 구간 $\left(\mathbf{\frac{15}{8}}, \mathbf{2}\right)$에 있다.

읽/기/자/료 사이값 정리와 탁자 고정하기



오른쪽 그림은 4개의 다리 A, B, C, D 중에서 D가 바닥에 닿지 않고 떠 있는 식탁을 위에서 내려다 본 모양이다.

이때, D를 지나는 대각선 위에 있는 B가 뜨지 않도록 한 손으로 A와 B의 중간쯤의 식탁 위를 누르고, 다른 한 손으로 C와 D 사이의 식탁 위를 누른다.

이제, 식탁을 시계 방향으로 $\frac{1}{4}$회전시킬 때, 다리 D의 끝은 바닥에서 떠 있는 상태로부터 출발하여 다리 C가 있었던 위치까지 이동하는 사이에 서서히 바닥에 접근하고, 따라서 $\frac{1}{4}$회전하는 사이에 반드시 바닥에 닿는 경우가 있게 된다.

이와 같이 탁자가 고정되는 원리를 설명하는 주는 것이 바로 사이값 정리이다.

대/단/원 평가 문제

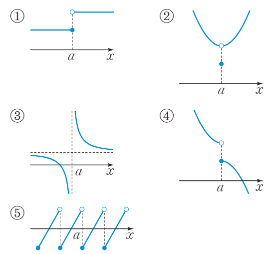
교과서 82 쪽

대/단/원 평가 문제

Ⅱ. 함수의 극한과 연속

선택형

1 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음과 같을 때, $\lim_{x\to a} f(x)$의 값이 존재하는 것은?



2 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $\lim_{x\to1} f(x)=2$, $\lim_{x\to1} g(x)=3$을 만족시킬 때, 다음 중 계산이 옳지 않은 것은? (단, $g(x)\neq0$)

① $\lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}=5$

② $\lim_{x\to1}\{f(x)\}^2=4$

③ $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{3}{2}$

④ $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)}{\{g(x)\}^2}=\dfrac{2}{9}$

⑤ $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-g(x)}{g(x)}=-\dfrac{1}{3}$

3 $\lim_{x\to3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2+7}-4}$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

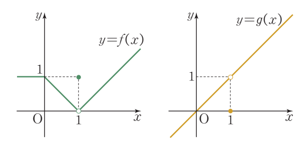
4 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-4x}{x-1}$의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

5 $\lim_{x\to1}\dfrac{3x^2+ax+b}{x-1}=3$일 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

6 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 각각 다음과 같을 때, 다음 중에서 옳은 것을 있는 대로 고른 것은?



ㄱ. $\lim_{x\to1} f(x)$의 값은 존재하지 않는다.
ㄴ. $\lim_{x\to1} f(g(x))=0$
ㄷ. 합성함수 $g(f(x))$는 $x=1$에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

1

목표| 함수의 극한의 뜻을 알게 한다.

풀이| 주어진 함수 $y=f(x)$에 대하여 $x=a$에서의 좌극한과 우극한의 일치 여부를 조사하면 $\lim_{x\to a} f(x)$의 값이 존재하는 것은 ②이다.

답 ②

2

목표| 함수의 극한에 대한 성질을 이용하여 주어진 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| ③ $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x\to1} f(x)}{\lim_{x\to1} g(x)}=\dfrac{2}{3}$

답 ③

3

목표| $\frac{0}{0}$꼴의 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이|
$$\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(\sqrt{x^2+7}+4)}{(\sqrt{x^2+7}-4)(\sqrt{x^2+7}+4)}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(\sqrt{x^2+7}+4)}{(x-3)(x+3)}$$
$$=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

답 ④

4

목표| $\frac{\infty}{\infty}$꼴의 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이|
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-4}{1-\frac{1}{x}}=-3$$

답 ①

5

목표| 분수함수의 극한에 대한 성질을 활용하여 함수의 극한과 관련된 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $\lim_{x\to1}\dfrac{3x^2+ax+b}{x-1}=3$이고 $\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}(3x^2+ax+b)=3+a+b=0$에서 $b=-3-a$

$\lim_{x\to1}\dfrac{3x^2+ax+b}{x-1}=\lim_{x\to1}\dfrac{(x-1)(3x+3+a)}{x-1}=6+a=3$

따라서 $a=-3$, $b=0$이므로 $ab=0$

답 ③

6

목표| 연속함수의 성질을 활용하여 주어진 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| ㄱ. $\lim_{x\to1-} f(x)=0$, $\lim_{x\to1+} f(x)=0$이므로
$\lim_{x\to1} f(x)=0$ (거짓)

ㄴ. $\lim_{x\to1-} f(g(x))=\lim_{x\to1-} f(x)=0$,
$\lim_{x\to1+} f(g(x))=\lim_{x\to1+} f(x)=0$
따라서 $\lim_{x\to1} f(g(x))=0$ (참)

ㄷ. $g(f(1))=g(1)=0$이고
$\lim_{x\to1-} g(f(x))=\lim_{x\to0+} g(x)=0$,
$\lim_{x\to1+} g(f(x))=\lim_{x\to1+} g(x)=0$
이므로 $\lim_{x\to1} g(f(x))=g(f(1))$
따라서 함수 $f(g(x))$는 $x=1$에서 연속이다. (참)

답 ⑤

교과서 83 쪽

[해답 p.200]

7 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}}{x^{2n+1}+1}$이 불연속인 x의 개수는?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

8 모든 실수에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$(x-2)f(x)=x^2+ax+6$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

9 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 다음 중에서 옳은 것을 있는 대로 고른 것은?

ㄱ. $f(x)$, $f(x)+g(x)$가 $x=a$에서 연속이면 함수 $g(x)$도 $x=a$에서 연속이다.
ㄴ. $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면 함수 $f(x)g(x)$도 $x=a$에서 연속이다.
ㄷ. $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이면 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$도 $x=a$에서 연속이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

10 연속함수 $f(x)$에 대하여
$f(-1)=-2$, $f(0)=2$, $f(1)=-1$, $f(2)=3$
일 때, 방정식 $f(x)-x=0$은 구간 $(-1,\ 2)$에서 적어도 n개의 실근을 가진다. 이때 n의 값은?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

서답형

11 삼차함수 $f(x)$에 대하여

$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=-3$, $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=-6$일 때,

$f(x)$를 구하여라.

12 임의의 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$가

$$5x^2-2\le f(x)\le 5x^2+7$$

을 만족시킬 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}$의 값을 구하여라.

|서|술|형|

13 함수 $f(x)=\begin{cases}\frac{a\sqrt{x+3}+b}{x-1} & (x\ne1)\\ 1 & (x=1)\end{cases}$가 $x=1$에서 연속이 되도록 하는 상수 a, b의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

|서|술|형|

14 성진이는 2014년 4월 1일에 자신의 손목시계를 보니 정확한 시각보다 10분 빨랐었고, 2014년 5월 1일에는 정확한 시각보다 5분 늦게 가고 있었다고 한다. 이 기간 동안에 성진이의 시계가 정확한 시각을 나타내는 순간이 적어도 한 번 있었음을 보여라.

7

목표| 주어진 함수의 연속성을 조사하여 불연속인 점의 개수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}}{x^{2n+1}+1}$에서

(i) $|x|>1$일 때 $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x+\frac{1}{x^{2n}}}=\frac{1}{x}$$

(ii) $|x|<1$일 때 $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$이므로

$$f(x)=\frac{0}{0+1}=0$$

(iii) $x=1$일 때 $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$이므로 $f(x)=\frac{1}{2}$

(iv) $x=-1$일 때 $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$, $\lim_{n\to\infty}x^{2n+1}=-1$

이므로 함숫값 $f(-1)$이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$, $x=-1$에서 불연속이다.

답 ③

8

목표| 주어진 함수가 모든 실수에서 연속이 되도록 하는 조건을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+ax+6}{x-2} & (x\ne2)\\ k & (x=2)\end{cases}$라고 하면

$\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax+6}{x-2}=k$가 성립해야 한다.

$\lim_{x\to2}(x^2+ax+6)=0$이므로

$4+2a+6=0$, $a=-5$

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-5x+6}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x-3)}{x-2}$$
$$=-1=k$$

따라서 $f(2)=-1$

답 ②

9

목표| 연속함수의 성질을 이용하여 주어진 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| ㄱ. $g(x)=\{f(x)+g(x)\}-f(x)$이므로 $x=a$에서 연속 (참)

ㄴ. (참)

ㄷ. $g(a)\ne0$인 경우에만 $\frac{f(x)}{g(x)}$도 $x=a$에서 연속 (거짓)

답 ③

10

목표| 사이값 정리를 이용하여 주어진 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $F(x)=f(x)-x$라고 하면 $F(x)$는 닫힌 구간 $[-1,\ 2]$에서 연속이고,

$F(-1)=f(-1)+1=-1<0$,

$F(0)=f(0)=2>0$,

$F(1)=f(1)-1=-2<0$,

$F(2)=f(2)-2=1>0$

따라서 방정식 $f(x)-x=0$은 열린 구간 $(-1,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(1,\ 2)$에서 적어도 하나씩의 근을 가지므로　$n=3$

답 ④

11

목표| 분수함수의 극한에 대한 성질을 활용하여 함수의 극한과 관련된 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=-3$에서 $\lim_{x\to-1}(x+1)=0$이므로

$\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)=0$ ……①

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=-6$에서 $\lim_{x\to2}(x-2)=0$이므로

$\lim_{x\to2}f(x)=f(2)=0$ ……②

①, ②에서 $f(x)$는 $(x+1)(x-2)$를 인수로 가진다.

$f(x)=(ax+b)(x+1)(x-2)$라고 하면 $(a\neq0)$

$\lim_{x\to-1}\frac{(ax+b)(x+1)(x-2)}{x+1}$

$=-3(-a+b)=-3$

즉 $a-b=-1$

$\lim_{x\to2}\frac{(ax+b)(x+1)(x-2)}{x-2}$

$=3(2a+b)=-6$

즉 $2a+b=-2$

따라서 $a=-1$, $b=0$이므로

$f(x)=-x(x+1)(x-2)$

답 $f(x)=-x^3+x^2+2x$

12

목표| 함수의 극한의 대소 관계를 이용하여 주어진 함수의 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\frac{5x^2-2}{x^2}\le\frac{f(x)}{x^2}\le\frac{5x^2+7}{x^2}$에서

$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-2}{x^2}\le\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}\le\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+7}{x^2}$

$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-2}{x^2}=5$, $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+7}{x^2}=5$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=5$

답 5

13

목표| 함수의 연속의 뜻을 이용하여 주어진 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x+3}+b}{x-1}=1$에서

$\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}(a\sqrt{x+3}+b)=0$

$2a+b=0$, $b=-2a$

$$\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x+3}+b}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{a(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{a}{\sqrt{x+3}+2}$$

$$=\frac{a}{4}=1$$

따라서 $a=4$, $b=-8$

답 $a=4$, $b=-8$

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소	배점
해결 과정	분모의 값이 0이므로 분자의 값도 0이 됨을 이용하기	30%
	b를 a로 나타내기	30%
	분자를 유리화하기	30%
답 구하기	a, b의 값을 각각 구하기	10%

14

목표| 사이값 정리를 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 2014년 4월 1일부터 x일이 지난 후 손목시계가 가리키는 시각에서 정확한 시각을 뺀 값을 $f(x)$라고 하면 함수 $f(x)$는 구간 $[0,\ 30]$에서 연속이 된다.

이때 $f(0)=10$, $f(30)=-5$이므로 사이값 정리에 의하여 $f(c)=0$을 만족시키는 c가 0과 30 사이에 적어도 하나 존재한다.

따라서 손목시계가 가리키는 시각이 정확한 시각과 일치하는 때는 최소한 한 번 있었다.

답 풀이 참조

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소	배점
해결 과정	함수 $f(x)$ 정하기	30%
	$f(x)$가 구간 $[0,\ 30]$에서 연속임을 이해하기	20%
	$f(0)=10$, $f(30)=-5$인 것을 확인하기	20%
	사이값 정리를 이용하여 $f(c)=0$인 값이 구간 $(0,\ 30)$에 존재함을 설명하기	20%
답 구하기	실제 문제 상황에 맞추어 설명하기	10%

교과서 84 쪽

M+ Real Life

수 학 + 실 생 활

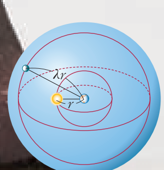
밤하늘은 왜 어두울까? –올베르스의 역설(Olbers' paradox)

현재도 쓰고 있는 소행성의 궤도 계산에 지대한 공헌을 한 독일의 천문학자인 올베르스(Olbers, H. W. M. ; 1758～1840)는 무수한 별이 하늘에 균등히 분포되어 있다면 밤하늘의 밝기가 낮과 똑같아야 한다고 지적하며 정적인 무한 우주에 대한 역설을 발표하였다.

우주 공간에 균일한 평균 밀도를 지닌 별들이 고르게 흩어져 있다면 변하지 않는 무한히 많은 별들에서 비춰지는 전체 별빛은 쉽게 계산할 수 있다.

별의 밝기는 거리의 제곱에 반비례하므로 어떤 별이 지구와 태양 사이의 거리의 k배 멀리 있다고 생각하면, 그 별빛의 세기는 태양빛의 $\frac{1}{k^2}$ 배로 희미해진다.

그러나 반지름의 길이가 r인 구의 겉넓이는 $4\pi r^2$이고, 반지름의 길이가 λr인 구의 겉넓이는 $4\pi\lambda^2 r^2$이기 때문에 우주 공간에 균등한 평균 밀도를 가진 별들이 고르게 흩어져 있다면, 거리에 대한 별들의 숫자는 거리의 제곱에 비례하여 증가한다.



따라서 우주가 균일한 빛을 가진 별을 가진다고 가정했을 때 전체 별빛과 태양빛의 세기는 동일하고, 하늘은 늘 정오의 태양처럼 밝아야 한다는 결론이 나온다.

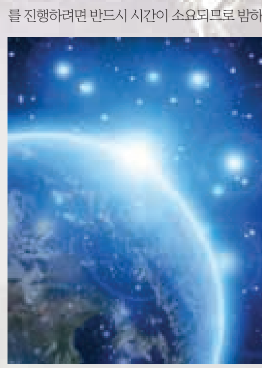
실제로 우리에게는 어두운 밤이 있고, 낮도 한없이 밝은 것은 아니다. 역설을 제기한 장본인인 올베르스는 그 이유로 우주 공간에 퍼져 있는 방대한 양의 먼지와 가스 구름들이 별빛을 흡수하기 때문에 모든 별빛이 지구에 도달할 수 없다는 '가스층 흡수 이론'을 주장하였다.

교과서 85 쪽

M+

그러나 오랜 세월 동안 별들이 우주 공간으로 방출한 열과 빛에 노출된 먼지와 가스층이 발광 성운이 되어 흡수한 복사와 똑같은 강도의 복사를 방출하게 되고, 별들이 영원히 타오른다면 이러한 복사는 무한대의 세기를 가질 것이다. 따라서 우주는 수천 ℃의 온도를 가진 열복사로 가득차서 밤하늘은 어둡기보다는 높은 온도에서 환하게 빛날 것이기 때문에 올베르스의 역설을 완전히 해결할 수는 없다.

영국의 물리학자 켈빈(Kelvin, W. T. ; 1824～1907)은 유한한 속도를 가지고 있는 빛이 특정 거리를 진행하려면 반드시 시간이 소요되므로 밤하늘을 가득 메우고 있는 별의 모습은 지금 이순간의 모습이 아니라 과거의 모습이라고 하면서, 밤하늘이 밝게 빛나려면 우주는 적어도 수백 조 광년 이상 뻗어 있어야 하지만 우리 우주가 아직 그 정도 나이를 먹지 않았기 때문에 밤하늘이 어둡게 보인다고 설명하였다.

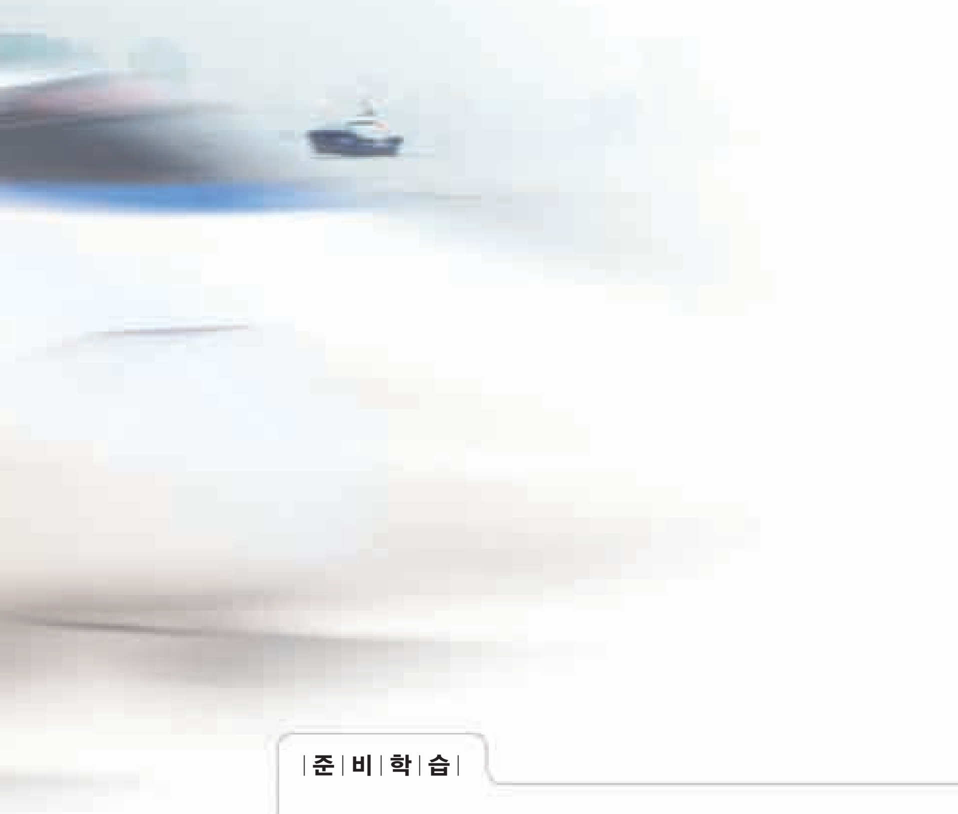


즉, 빛의 속도는 유한하여 일부 빛은 아직 지구에 도달하지 않았으며, 빅뱅 우주론에 따르면 우주는 유한한 나이를 가지기 때문에 별들이 일정 거리 안에만 존재하고, 우주가 팽창하기 때문에 세월이 흐를수록 아직 도달하지 못한 별빛들이 마저 도달하여 밤하늘의 밝기가 점차 밝아지는 현상도 나타나지 않는다.

변하지 않는 것은 아무것도 없다는 말처럼

세상은 변화하는 것으로 가득 차 있다.

다항함수의 미분법



| 준 | 비 | 학 | 습 |

미적분 I 함수의 극한

1 **다음 극한값을 구하여라.**

(1) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=2$ (2) $\lim_{h\to 1}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 1}(2x+h)=2x+1$

수학 I 직선의 방정식

2 **다음 직선의 방정식을 구하여라.**

(1) 점 $(-1, 2)$를 지나고 기울기가 2인 직선 $y-2=2(x+1)$, $y=2x+4$

(2) 두 점 $(1, 2)$, $(3, 8)$을 지나는 직선 $y-2=\frac{8-2}{3-1}(x-1)$, $y=3x-1$

수학 II 이차함수의 최대 · 최소

3 **주어진 범위에서 다음 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구하여라.**

(1) $y=x^2-2x+3$ $(-1\le x\le 2)$ $y=(x-1)^2+2$에서 최댓값 6, 최솟값 2

(2) $y=-x^2-2$ $(1\le x\le 3)$ 최댓값 -3, 최솟값 -11

단원의 지도 목표

1. 미분계수와 도함수

① 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있게 한다.
② 미분계수의 기하학적 의미를 알게 한다.
③ 미분가능성과 연속성의 관계를 이해하게 한다.
④ 함수 $y=x^n$ (n은 양의 정수)의 도함수를 구할 수 있게 한다.
⑤ 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있게 한다.

2. 도함수의 활용

① 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.
② 함수에 대한 평균값 정리를 이해하게 한다.
③ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있게 한다.
④ 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있게 한다.
⑤ 방정식과 부등식에 활용할 수 있게 한다.
⑥ 속도와 가속도에 대한 문제에 활용할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

① 롤의 정리, 평균값 정리를 함수의 그래프를 이용하여 나타내고 그 정리가 성립함을 이해하게 한다.
② 속도와 가속도에 대한 문제는 직선 운동에 한하여 다룬다.

교수 · 학습의 계열

선수 학습

[수학 I]
다항식
이차함수

[수학 II]
수열

[미적분 I]
수열의 극한
함수의 극한과 연속

본 단원

1. 미분계수와 도함수
미분계수
도함수

2. 도함수의 활용
접선의 방정식
평균값 정리
함수의 증가와 감소
함수의 극대와 극소
함수의 그래프
방정식과 부등식에의 활용
속도와 가속도

후속 학습

[미적분 I]
다항함수의 적분법

단원의 차시별 지도 계획

중단원	소단원	차시	교과서(쪽)	지도 내용	용어와 기호
단원의 개관		1~3	86~87	• 단원의 개관 • 준비 학습	
1. 미분계수와 도함수	**중단원 도입**		88	• 탄산음료의 톡 쏘는 맛은 압력과 온도에 따라 달라진다.	
	01 미분계수		89~92	• 평균변화율 • 미분계수	증분, 평균변화율, 미분가능, 순간변화율, 미분계수, $\varDelta x$, $\varDelta y$
	02 미분계수의 의미와 연속성	4~5	93~96	• 미분계수의 기하학적 의미 • 미분가능성과 연속성	
	03 도함수	6~9	97~102	• 도함수의 정의 • $y=x^n$(n은 양의 정수)의 도함수 • 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법	도함수, $f'(x)$, y', $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d}{dx}f(x)$
	수준별 학습	10	103~105	• 중단원 확인 학습 문제	
2. 도함수의 활용	**중단원 도입**	11~12	106	• 항공기의 이착륙을 위해서는 충분한 길이의 활주로가 필요하다.	
	01 접선의 방정식		107~109	• 접선의 방정식	
	02 평균값 정리	13~15	110~114	• 롤의 정리 • 평균값 정리	롤의 정리, 평균값 정리
	03 함수의 증가와 감소	16~17	115~117	• 함수의 증가와 감소 • 함수의 증가, 감소와 도함수의 부호	증가, 감소
	04 함수의 극대와 극소	18~19	118~121	• 함수의 극대와 극소 • 극대와 극소의 판정	극대, 극소, 극값, 극댓값, 극솟값
	05 함수의 그래프	20~21	122~124	• 다항함수의 그래프의 개형 • 구간에서의 함수의 최댓값, 최솟값	
	06 방정식과 부등식에의 활용	22~23	125~127	• 함수의 그래프를 이용한 방정식의 실근의 개수 • 함수의 그래프를 이용한 부등식의 증명	
	07 속도와 가속도	24	128~130	• 속도와 가속도	
	수준별 학습	25	131~133	• 중단원 확인 학습 문제	
단원 마무리		26~27	134~141	• 수행 과제 • 대단원 학습 내용 정리 • 대단원 평가 문제 • 수학 플러스	

단원의 이론적 배경

1. 미분법과 적분법의 발견

수학의 발전에 있어서 17세기는 괄목할만한 시기였는 데 가장 큰 업적이 미적분의 발견이다. 우리는 미분을 먼저 배우고 적분을 나중에 배우지만 역사적으로는 적분이 먼저 발달하였다.

적분은 고대부터 넓이, 부피, 호의 길이를 구하는 수단으로 개발되었고, 미분은 곡선의 접선과 움직이는 물체의 운동을 기술하기 위하여 17세기에 시작되었다. 17세기 말에 이르러 미분과 적분은 서로 역연산 관계임을 알게 되었다.

미적분은 뉴턴(Newton, I. ; 1642～1727)과 라이프니츠(Leibniz, G. W. ; 1646～1716)에 의하여 거의 동시에 발견되었다. 미분과 적분의 발견을 둘러싸고 유럽 대륙과 영국 사이에는 오랫동안 논쟁이 계속되었으나 오늘날에는 두 사람이 각각 독자적으로 발견했다고 인정한다.

뉴턴은 1687년 완성된 그의 저서 “프린키피아”에서 유율이라는 미분을 소개하였는데 이 유율법은 뉴턴이 1665년에 발견했다고 한다. 또 뉴턴은 미분과 적분을 이용하여 만유인력의 법칙을 유도하고 역학의 원리를 완성시켰다. 미분에 관한 체계적인 전개는 1704년 발표한 논문 ‘곡선의 구적에 관하여’와 뉴턴이 죽은 후 출판된 저서 “유율과 급수”에서 나타난다.


라이프니츠

라이프니츠는 1676년에 미분과 적분을 고안하였으며, 1684년에 미분법을 발표하고 1686년에 적분법을 발표하였다. 라이프니츠는 적분이 미분의 역연산임을 알았고, 자신만의 기호법을 도입하여 보편화된 계산법으로서의 미분법과 적분법을 확립시켰다.

한편, $\dfrac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$를 구하는 정식화된 미분법은 코시에 의하여 만들어졌다.

2. 코시의 평균값 정리

프랑스의 수학자 코시(Cauchy, A. L. ; 1789～1857)는 평균값 정리를 다음과 같이 일반화하였다.

코시의 평균값 정리

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린 구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하며 $g'(x)\neq 0$이면, 열린 구간 $(a,\ b)$에 점 c가 적어도 하나 존재하여 다음을 만족한다.

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$


코시

$g(b)-g(a)=0$이면 이 정리는 의미가 없으므로 우선 $g(b)\neq g(a)$임을 보이자.

$g(b)=g(a)$라고 가정하면, $g(x)$는 롤의 정리의 조건을 만족하므로 열린 구간 $(a,\ b)$에 적당한 x가 존재하여 $g'(x)=0$을 만족한다.

이는 정리의 가정 $g'(x)\neq 0$에 모순이 되므로 $g(b)=g(a)$가 될 수 없다.

이제, 함수 $F(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$$

이때, $F(x)$는 가정에 의해서 평균값 정리의 조건을 만족한다. 또

$$F(a)=F(b)=0$$

이므로 롤의 정리에 의하여 열린 구간 (a, b)에 $F'(c)=0$을 만족하는 c가 적어도 하나 존재한다.

따라서

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)$$

에 $x=c$를 대입하면 $F'(c)=0$, $g'(c)\neq 0$이므로 다음이 성립한다.

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

코시의 평균값 정리에서 $g(x)=x$로 놓으면 $g'(x)=1$이고 $g(b)=b$, $g(a)=a$이므로

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

가 되어 평균값 정리가 된다.

3. 극대·극소를 구하는 페르마의 방법


페르마

뉴턴 이전의 미분에 관한 연구로는 페르마(Fermat, Pierre de. ; 1601~1665)가 고안한 다항함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값을 찾아내는 페르마의 방법이 있다.

페르마는 극댓값과 극솟값에서는 접선이 수평이 되어야 한다는 사실에 착안하여 다음 식을 생각하였다.

$$\frac{f(x+E)-f(x)}{E}=0$$

좌변의 분자를 전개하여 E로 나눈 다음 $E=0$으로 놓고 방정식을 풀어서 극점의 x좌표를 구하였다. 이것은 결국 다음을 만족시키는 x를 구한 것과 같다.

$$f'(x)=\lim_{E\to 0}\frac{f(x+E)-f(x)}{E}=0$$

4. 뉴턴의 미분법


뉴턴

동점 P가 움직인 거리 x와 걸린 시간 t 사이에 $x=t^3$의 관계가 있을 때 점 P의 속도를 구하기 위하여 뉴턴은 다음과 같은 방법을 사용하였다.

작은 증가를 0을 써서 나타내면 시간 t가 t_0에서 t_0+0이 될 때 점 P가 움직인 거리 x는 $t_0{}^3$에서

$$(t_0+0)^3=t_0{}^3+3\cdot t_0{}^2\cdot 0+3\cdot t_0\cdot 0^2+0^3$$

이 된다.

여기서 t가 0만큼 증가할 때 움직인 거리는

$$3t_0{}^2\cdot 0+3t_0\cdot 0^2+0^3$$

이므로 움직인 거리와 증가한 양의 비는 다음과 같다.

$$(3t_0{}^2\cdot 0+3t_0\cdot 0^2+0^3):0=(3t_0{}^2+3t_0\cdot 0+0^2):1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 우변에서 0은 한없이 작다고 생각하여 0이 곱해진 항을 없애면 $3t_0{}^2:1$이 되므로 점 P의 시간 t_0에서의 속도는 $3t_0$이다.

차시별 교수 · 학습 과정안(예시)

대단원		Ⅲ. 다항함수의 미분법	쪽수	교과서 86~90쪽
소단원		1. 미분계수와 도함수　01 미분계수	차시	1/27
학습 목표		평균변화율의 뜻을 안다.		
단계	**학습 과정**	**교수 · 학습 활동**		**교수 · 학습상의 유의점**
도입	선수 학습 확인 동기 유발 학습 목표 제시	◎ 준비 학습을 이용하여 이번 단원의 학습에 필요한 기초 개념을 간단히 확인, 점검한다. ◎ 중단원 도입 글을 읽고 단원 과제를 발문하여 이번 중단원을 학습하면서 이 과제를 해결할 수 있음을 암시한다. ◎ 이번 차시의 학습 목표를 제시한다. • 평균변화율의 뜻을 안다.		모둠 학습을 위한 소집단을 사전에 편성한다.
전개	탐구 활동 개념 학습 문제 해결	◎ 생각 열기를 읽고, 탐구 활동을 모둠별로 해결하도록 한다. ◎ 탐구 활동 결과를 발표하게 하고, 보충 설명을 한다. ◎ 학습 내용 설명 **증분** 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때, 함숫값은 $f(a)$에서 $f(b)$까지 변한다. x값의 변화량 $b-a$를 x의 증분, y값의 변화량 $f(b)-f(a)$를 y의 증분이라 하고, 이것을 기호로 각각 Δx, Δy와 같이 나타낸다. **평균변화율** 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$ ◎ 예제 01을 설명한다. ◎ 문제 1, 2번을 풀게 한다. • 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다.		
정리	학습 내용 정리 차시 예고	◎ 본시의 학습 내용을 정리한다. ◎ 다음 차시를 예고한다. • 미분계수의 뜻을 안다.		

차시별 교수 · 학습 과정안(예시)

대단원		Ⅲ. 다항함수의 미분법	쪽수	교과서 91~92쪽
소단원		1. 미분계수와 도함수　01 미분계수	차시	2/27
학습 목표		미분계수의 뜻을 안다.		
단계	학습 과정	교수 · 학습 활동		교수 · 학습상의 유의점
도입	선수 학습 확인 동기 유발 학습 목표 제시	◐ 이전 차시에 학습한 내용을 간단히 확인, 점검한다. ◐ 지난 시간에 배운 평균변화율의 극한값에 대하여 다룰 것임을 언급한다. ◐ 이번 차시의 학습 목표를 제시한다. • 미분계수의 뜻을 안다.		모둠 학습을 위한 소집단을 사전에 편성한다.
전개	탐구 활동 개념 학습	◐ 탐구 활동을 모둠별로 해결하도록 한다. ◐ 탐구 활동 결과를 발표하게 하고, 보충 설명을 한다. ◐ 학습 내용 설명 **미분가능** 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 $a+\Delta x$까지 변할 때의 평균변화율은 $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$ 이다. 여기서 $\Delta x \to 0$일 때, 평균변화율의 극한값 $$\lim_{\Delta \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta \to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$ 가 존재하면 함수 $y=f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 한다. **미분계수** 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는 $$f'(a)=\lim_{\Delta \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta \to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{x \to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$		
정리	학습 내용 정리 차시 예고	◐ 본시의 학습 내용을 정리한다. ◐ 다음 차시를 예고한다. • 미분계수를 구할 수 있다.		

1 미분계수와 도함수

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 미분계수의 뜻을 알고 그 값을 구할 수 있게 한다.

② 미분계수의 기하학적 의미를 이해하게 한다.

③ 미분가능성과 연속성의 관계를 이해하게 한다.

④ $y=x^n$ (n은 양의 정수)의 도함수를 구할 수 있게 한다.

⑤ 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고 다항함수의 도함수를 구할 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
01 미분계수	평균변화율
	미분계수
02 미분계수의 의미와 연속성	미분계수의 기하학적 의미
	미분가능성과 연속성
03 도함수	도함수의 의미
	$y=x^n$ (n은 양의 정수)의 도함수
	함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

교과서 88 쪽

1 미분계수와 도함수

탄산음료의 톡 쏘는 맛은 압력과 온도에 따라 달라진다.

물에는 많지는 않지만 어느 정도의 기체가 녹아 있는데 물에 녹는 기체는 일반적으로 물의 온도가 낮을수록 그리고 압력이 높을수록 많이 녹게 된다.

탄산음료병의 뚜껑을 열면 소리와 함께 기포가 올라오는 것을 볼 수 있는데 이것은 탄산음료에 가해지는 압력이 낮아져 탄산음료에 녹아 있던 이산화탄소가 기화되면서 볼 수 있는 현상이다. 또 탄산음료를 마실 때, 혀와 목에 톡 쏘는 맛이 느껴지는 것은 입안의 온도가 높아 탄산음료에 녹아 있던 이산화탄소가 보다 많이 기화되면서 피부에 자극을 주기 때문이다. 따라서 이산화탄소가 많이 기화될수록 톡 쏘는 맛을 많이 느낄 수 있다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 102 쪽

온도 변화에 따른 탄산음료의 톡 쏘는 맛의 정도를 설명할 수 있을까?

들어가면서 미분법은 그 응용 범위가 매우 넓어 자연 현상, 사회 현상, 심리 현상 등을 연구하는 자연과학, 공학, 경제학, 사회학 등 운동과 변화 현상을 다루는 거의 모든 분야에서 미분법에 대한 지식은 필수이다.

이 단원에서는 평균변화율의 극한으로 미분계수의 개념을 이해하고 이를 바탕으로 도함수를 정의한다. 또한 미분계수의 의미를 파악하고 정의에 의하여 주어진 함수의 도함수를 구할 수 있게 한다.

성취 기준과 성취 수준

성취 기준		성취 수준
1. 미분계수의 뜻과 기하학적 의미를 알고 그 값을 구할 수 있다.	상	곡선 위의 주어진 점에서의 접선의 기울기를 구할 수 있다.
	중	일차함수, 이차함수 등과 같은 간단한 함수의 주어진 점에서의 미분계수를 구할 수 있다.
	하	주어진 점에서의 미분계수가 그 점의 접선의 기울기임을 말할 수 있다.
2. 미분가능성과 연속성의 관계를 이해한다.	상	주어진 점에서 함수의 연속성과 미분가능성을 판별하고, 이를 설명할 수 있다.
	중	주어진 점에서 간단한 함수의 연속성과 미분가능성을 판별할 수 있다.
	하	함수의 그래프를 보고 연속성과 미분가능성을 판별할 수 있다.
3. 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.	상	함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 이용하여 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.
	중	함수의 실수배, 합, 차의 미분법을 이용하여 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.
	하	함수 $y=x^n$ (n은 양의 정수)의 도함수가 $y'=nx^{n-1}$임을 말할 수 있다.

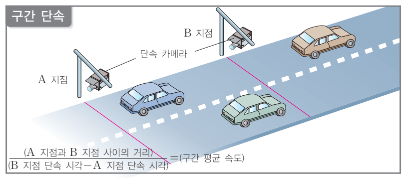
교과서 89 쪽

01 미분계수

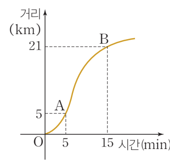
● 미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.

평균변화율이란 무엇인가?

생각 열기 도로의 특정한 구간이 시작되는 지점과 끝나는 지점에 카메라를 각각 설치하고 차량의 통과 시각을 측정하여 제한 속도 이상으로 주행한 차량을 단속하는 것을 구간 단속이라고 한다.



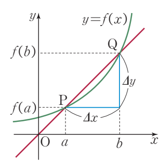
탐구 활동 민호는 아버지와 함께 승용차를 타고 구간 단속을 하는 고속 국도를 지났다. A 지점과 B 지점 사이의 이동한 시간과 거리가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 물음에 답하여 보자.



1. A 지점에서 B 지점까지 평균 속도(km/min)를 구하여 보자.
2. 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기를 구하여 보자.
3. 1과 2의 결과를 서로 비교하여 보자.

함수 $y=f(x)$에 대하여 x값의 변화량과 y값의 변화량의 비는 그래프의 기울기와 어떤 관계가 있는지 알아보자.

함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때, 함숫값은 $f(a)$에서 $f(b)$까지 변한다.



❶ 이때 x값의 변화량 $b-a$를 x의 **증분**, y값의 변화량 $f(b)-f(a)$를 y의 **증분**이라 하고, 이것을 기호로 각각

$$\Delta x,\ \Delta y$$

와 같이 나타낸다. 즉,

$$\Delta x=b-a,\ \Delta y=f(b)-f(a)=f(a+\Delta x)-f(a)$$

이다.

● Δ는 차를 뜻하는 영어 Difference의 첫 글자 D에 해당하는 그리스 문자로 '델타(delta)'라고 읽는다.

01 미분계수

소단원 지도 목표

① 평균변화율의 뜻을 알게 하고, 이를 구할 수 있게 한다.
② 순간변화율로서 미분계수를 이해하고, 미분가능의 뜻을 이해하게 한다.
③ 정의에 따라 미분계수를 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 미분계수는 평균변화율의 극한이라는 것을 이해하고, 정의를 이용하여 미분계수를 구할 수 있도록 한다.

새로 나온 용어와 기호

• 증분(增分, increment)
• 평균변화율(平均變化率, mean rate of change)
• 순간변화율(瞬間變化率, instantaneous rate of change)
• 미분계수(微分係數, derivative)
• 미분가능(微分可能, differentiable)
• Δx, Δy, $f'(x)$

생각 열기 참/고/자/료

구간 단속이란 과속 단속의 종류 중 하나이다. 구간 단속 시작점인 A 지점의 통과 시간과 통과 속도를 기준으로 B 지점까지의 이동 거리를 기준으로 차량의 평균속도를 계산하여 과속 여부를 판정하는 단속 방식으로, 제한된 속도로 운행하였을 때 계산된 운행 시간과 통과된 운행 시간이 달랐을 때 단속 대상이 된다. 기존 과속 단속 카메라 앞에서만 속도를 감속했다가 카메라를 지나면 다시 가속하던 '캥거루 과속'을 방지하기 위한 방법이다. 영동고속도로를 시작으로 전국의 일부 고속도로와 직선 구간이 많은 국도에서 운영되고 있다. 이에 관한 자세한 정보는 지방경찰청 사이트를 참고하면 된다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 승용차를 타고 A 지점과 B 지점 사이의 이동한 시간과 거리를 통해 평균 속도를 구하고, 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기를 구함으로서 평균변화율의 의미를 이해하기 위한 활동이다.

1. $(\text{평균 속도})=\dfrac{(\text{이동 거리})}{(\text{걸린 시간})}=\dfrac{16}{10}=\dfrac{\mathbf{8}}{\mathbf{5}}$ **(km/min)**

2. $(\text{직선의 기울기})=\dfrac{(y\text{값의 변화량})}{(x\text{값의 변화량})}=\dfrac{\mathbf{8}}{\mathbf{5}}$

3. A 지점과 B 지점 사이의 평균 속도와 직선의 기울기가 서로 같음을 알 수 있다.

본문 해설

❶ Δx, Δy는 하나의 기호이므로 $\Delta\times x$, $\Delta\times y$로 생각하지 않도록 하며, x의 증분을 나타내는 Δx는

$x_2>x_1$이면 $\Delta x=x_2-x_1>0$

$x_2<x_1$이면 $\Delta x=x_2-x_1<0$

임에 유의해야 한다.

즉, Δx, Δy는 음수일 수 있음을 알게 한다.

교과서 90 쪽

❶ 또 함수 $y=f(x)$에서 x의 증분 $\varDelta x$에 대한 y의 증분 $\varDelta y$의 비

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+\varDelta x)-f(a)}{\varDelta x}$$

를 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 함수 $y=f(x)$의 **평균변화율**이라고 한다.

한편 함수 $y=f(x)$의 평균변화율은 앞의 그래프에서 알 수 있듯이 두 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$, $\mathrm{Q}(b, f(b))$를 지나는 직선 PQ의 기울기와 같다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

평균변화율

함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+\varDelta x)-f(a)}{\varDelta x}$$

예제 01 함수 $f(x)=x^2$에서 x의 값이 다음과 같이 변할 때의 평균변화율을 구하여라.

(1) -2에서 3까지　　(2) a에서 $a+\varDelta x$까지

풀이 (1) $\dfrac{\varDelta y}{\varDelta x}=\dfrac{f(3)-f(-2)}{3-(-2)}=\dfrac{3^2-(-2)^2}{3-(-2)}=1$

(2) $\dfrac{\varDelta y}{\varDelta x}=\dfrac{f(a+\varDelta x)-f(a)}{(a+\varDelta x)-a}=\dfrac{(a+\varDelta x)^2-a^2}{\varDelta x}=2a+\varDelta x$

답 (1) 1　(2) $2a+\varDelta x$

문제 1 함수 $f(x)=x^3+4$에서 x의 값이 다음과 같이 변할 때의 평균변화율을 구하여라.

(1) 1에서 3까지　　(2) a에서 $a+\varDelta x$까지

문제 2 높이가 100 m인 번지 점프대에서 뛰어내린 사람의 x초 후의 높이를 y m라고 하면 $y=-5x^2+100$이 성립한다고 한다. x의 값이 다음과 같이 변할 때, 높이의 평균변화율을 구하여라.

(1) 1에서 4까지

(2) a에서 $a+\varDelta x$까지

본문 해설

❶ 변하는 두 양 x와 y 사이의 평균변화율이란 한 양 x가 a에서 b까지 변할 때 다른 양 y가 평균적으로 얼마나 변하는지를 나타내는 비율을 말한다.
또, 평균변화율은 중학교에서 배운 직선의 기울기 개념을 일반화한 것으로, 다음과 같이 계산될 수 있음을 알게 한다.
함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+\varDelta x)-f(a)}{\varDelta x}$$

1

목표| 평균변화율을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\dfrac{\varDelta y}{\varDelta x}=\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=\dfrac{31-5}{2}=\mathbf{13}$

(2) $\dfrac{\varDelta y}{\varDelta x}=\dfrac{f(a+\varDelta x)-f(a)}{(a+\varDelta x)-a}$

$=\dfrac{(a+\varDelta x)^3+4-(a^3+4)}{\varDelta x}$

$=\dfrac{a^3+3a^2\varDelta x+3a(\varDelta x)^2+(\varDelta x)^3+4-a^3-4}{\varDelta x}$

$=\mathbf{3a^2+3a\varDelta x+(\varDelta x)^2}$

2

목표| 실생활 상황에서 평균변화율을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\dfrac{\varDelta y}{\varDelta x}=\dfrac{f(4)-f(1)}{4-1}=\dfrac{20-95}{3}$

$=\mathbf{-25(m/s)}$

(2) $\dfrac{\varDelta y}{\varDelta x}=\dfrac{f(a+\varDelta x)-f(a)}{(a+\varDelta x)-a}$

$=\dfrac{-5(a+\varDelta x)^2+100-(-5a^2+100)}{\varDelta x}$

$=\mathbf{(-10a-5\varDelta x)(m/s)}$

지/도/자/료

미분계수의 정의는 평균변화율의 극한값임을 이해시키고 극한값의 존재 조건을 생각하게 하여 미분가능성을 이해시킨다.
즉, 함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하다는 것은

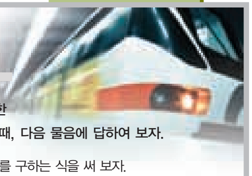
$$\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{f(x+\varDelta x)-f(x)}{\varDelta x}$$

가 존재한다는 뜻이고 이 극한값이 존재한다는 것은 $\varDelta x\to 0+$일 때의 우극한과 $\varDelta x\to 0-$일 때의 좌극한이 같으며 그 값이 유한 확정값이라는 것이다.
상수함수의 미분계수는 항상 0이며 다음과 같이 증명할 수 있다.
구간 (α, β)에서 상수함수를 $f(x)=c$ (c는 상수)라고 하면 구간 (α, β) 안의 임의의 점 a에 대하여

$$f'(a)=\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{f(a+\varDelta x)-f(a)}{\varDelta x}$$

$$=\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{c-c}{\varDelta x}=\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{0}{\varDelta x}=0$$

교과서 91 쪽



미분계수란 무엇인가?

탐구 활동 열차가 플랫폼으로 들어오며 제동을 건 후 x초까지 이동한 거리를 y m라고 하면 $y=60x-1.5x^2$이 성립한다고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.

1. x의 값이 10에서 $10+\Delta x$까지 변할 때 열차의 평균 속도를 구하는 식을 써 보자.
2. 제동을 건 후 열차의 각 구간별 평균 속도를 구하여 보자.

구간(초)	10～11	10～10.1	10～10.01	10～10.001
평균 속도(m/s)				

3. $x=10$인 순간의 열차 속도를 추측하여 보자.

함수 $y=f(x)$에서 $x=a$인 순간에 함숫값의 변화를 나타내는 방법에 대하여 알아보자.

❶ 함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 $a+\Delta x$까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

이다. 여기서 $\Delta x \to 0$일 때, 평균변화율의 극한값

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} \quad \cdots\cdots ①$$

가 존재하면 함수 $y=f(x)$는 $x=a$에서 **미분가능**하다고 한다. 이때 이 극한값을 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 **순간변화율** 또는 **미분계수**라 하고, 이것을 기호로

❷ $$f'(a)$$

와 같이 나타낸다.

특히 함수 $f(x)$가 어떤 열린 구간에 속하는 모든 x의 값에서 미분가능할 때, 함수 ❸ $f(x)$는 그 구간에서 미분가능하다고 한다. 또 함수 $f(x)$가 정의역에 속하는 모든 x의 값에서 미분가능할 때, 함수 $f(x)$는 미분가능한 함수라고 한다.

한편 ①에서 $a+\Delta x=x$라고 하면 $\Delta x=x-a$이고 $\Delta x \to 0$일 때 $x \to a$이므로

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

이다. 따라서

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

와 같이 나타낼 수 있다.

● $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$가 존재
$\Longleftrightarrow \displaystyle\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{\Delta y}{\Delta x}$

● 프랑스 수학자 라그랑주(Lagrange, J. L.; 1736～1813)는 미분계수를 나타내는 기호 $f'(a)$를 처음으로 사용하였다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 열차가 플랫폼으로 들어오며 제동을 건 후의 시간과 이동한 거리의 관계식에서 $x=10$인 순간의 속도를 추측하게 해 봄으로써 순간변화율의 의미를 이해하게 하려는 것이다.

1. $f(x)=60x-1.5x^2$이라고 하면
(평균 속도)

$$=\frac{f(10+\Delta x)-f(10)}{(10+\Delta x)-10}$$

$$=\frac{\{60(10+\Delta x)-1.5(10+\Delta x)^2\}-(60\times 10-1.5\times 10^2)}{(10+\Delta x)-10}$$

2.

구간	10～11	10～10.1	10～10.01	10～10.001
평균 속도(m/s)	28.5	29.85	29.985	29.9985

3. $x=10$인 순간의 열차 속도는 **30 m/s**에 가까워짐을 알 수 있다.

본문 해설

❶ 함수 $y=f(x)$에 대하여 x의 값이 a에서 $a+h$까지 변할 때의 평균변화율

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

의 극한값

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

가 존재하면 이 극한값을 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수라고 하며, 이것을 기호로 $f'(a)$와 같이 나타낸다.
이때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 한다.

❷ $f'(a)$의 여러 가지 표현을 알아보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f'(a)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\\ &=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\\ &=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\\ &=\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\end{aligned}$$

❸ (i) 함수 $f(x)$가 구간 (α, β)에서 미분가능하다는 정의는 구간 (α, β)에 속하는 임의의 a에 대하여 $f'(a)$가 존재한다는 것이다.
만일 함수 $f(x)$의 정의역에 속하는 모든 a에 대하여 $f'(a)$가 존재하면, 즉 정의역의 모든 x의 값에서 $f(x)$가 미분가능하면 함수 $f(x)$는 미분가능한 함수라고 한다.
한편 다항함수 $f(x)$는 정의역이 실수 전체의 집합이며 임의의 실수 a에 대하여 $f'(a)$가 존재한다.
따라서 다항함수는 미분가능한 대표적인 함수로 이 단원에서는 다항함수를 미분하는 방법을 다룬다.
(ii) 함수 $f(x)$가 구간 (c, d)의 모든 x의 값에서 미분가능하면 $f(x)$는 구간 (c, d)에서 미분가능하다고 한다.
예를 들어 함수 $f(x)$가 구간 $(1, 3)$에서 미분가능하면 $f'(1.2)$, $f'(1.5)$, $f'(2.6)$ 등이 존재한다.
하지만 4는 구간 $(1, 3)$에 포함되지 않으므로 $f'(4)$의 값은 존재하지 않을 수도 있다.

교과서 92 쪽

이상을 정리하면 다음과 같다.

미분계수

함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

예제 02 다음 함수의 $x=1$에서의 미분계수를 구하여라.

(1) $f(x)=3x-1$　　(2) $f(x)=x^2$

풀이 (1) $f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{3(1+\Delta x)-1\}-(3\cdot 1-1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3\Delta x}{\Delta x}=3$

(2) $f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\Delta x)^2-1^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x)=2$

답 (1) 3　(2) 2

문제 3 다음 함수의 $x=3$에서의 미분계수를 구하여라.

(1) $f(x)=4x+3$　　(2) $f(x)=-x^2+x$

문제 4 함수 $f(x)=ax+3$의 $x=2$에서의 미분계수가 5일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

실생활

문제 5 제품 x개를 생산하는 데 소요되는 총비용을 $C(x)$라고 하면 함수 $C(x)$의 $x=a$에서의 순간변화율을 a개를 생산할 때의 한계 비용이라고 한다. 한 회사가 어떤 제품 x개를 생산하는 데, 소요되는 총비용이

$$C(x)=10000+50x+0.1x^2\text{(원)}$$

이라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 제품의 생산량이 100개에서 200개로 증가할 때, 총비용의 평균변화율을 구하여라.

(2) 제품의 생산량이 100개일 때의 한계 비용을 구하여라.

3

목표| 미분계수를 구할 수 있게 한다.

풀이|

(1) $f'(3)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{4(3+\Delta x)+3\}-(4\cdot 3+3)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}4$

$=\mathbf{4}$

(2) $f'(3)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-(3+\Delta x)^2+(3+\Delta x)-(-3^2+3)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-5\Delta x-(\Delta x)^2}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}(-5-\Delta x)$

$=\mathbf{-5}$

4

목표| 미분계수의 정의를 이용하여 미정계수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{a(2+\Delta x)+3\}-(2a+3)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a\Delta x}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}a$

$=a$

$f'(2)=5$이므로　$a=\mathbf{5}$

5

목표| 미분계수의 정의를 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| (1) 제품의 생산량이 100개에서 200개로 증가할 때 총비용의 평균변화율은

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$=\frac{C(200)-C(100)}{200-100}$

$=\frac{10000+50\times 200+0.1\times 200^2-(10000+50\times 100+0.1\times 100^2)}{200-100}$

$=\frac{50\times 100+0.1\times 30000}{100}=\mathbf{80}$**(원)**

(2) $f'(100)$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{C(100+\Delta x)-C(100)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{10000+50(100+\Delta x)+0.1(100+\Delta x)^2-(10000+50\times 100+0.1\times 100^2)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{50\Delta x+0.1\{200\Delta x+(\Delta x)^2\}}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}(70+0.1\Delta x)=\mathbf{70}$**(원)**

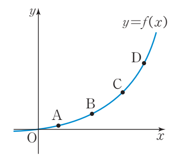
교과서 93 쪽

02 미분계수의 의미와 연속성

● 미분계수의 기하학적 의미를 안다.
● 미분가능성과 연속성의 관계를 이해한다.

미분계수는 기하학적으로 어떤 의미가 있는가?

탐구 활동 오른쪽 그림은 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 네 점 A, B, C, D를 나타낸 것이다. 다음 물음에 답하여 보자.



1. 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 A에 접하는 직선을 그려 보자.
2. 점 A와 세 점 D, C, B를 잇는 직선을 각각 그려 보자.
3. 함수 $y=f(x)$의 그래프 위를 움직이는 점 P가 세 점 D, C, B를 차례로 지나 점 A에 가까워질 때, 두 점 A, P를 잇는 직선은 어떤 직선에 가까워지는지 말하여 보자.

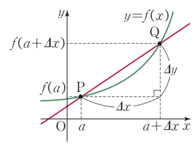
함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 $a+\Delta x$까지 변할 때의 평균변화율

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

는 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점

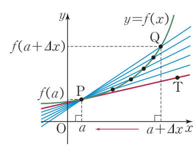
P$(a, f(a))$, Q$(a+\Delta x, f(a+\Delta x))$

를 지나는 직선 PQ의 기울기와 같다.



이때 $\Delta x \to 0$이면 점 Q는 곡선 $y=f(x)$를 따라 점 P에 한없이 가까워지고, 직선 PQ는 점 P를 지나는 일정한 직선 PT에 한없이 가까워진다.

이 직선 PT를 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선이라 하고, 점 P를 이 접선의 접점이라고 한다.

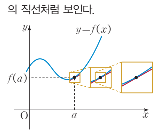


❶ 따라서 $\Delta x \to 0$일 때 직선 PQ의 기울기의 극한값, 즉 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수

$$f'(a)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P$(a, f(a))$에서의 접선 PT의 기울기와 같음을 알 수 있다.

● 함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 점 $(a, f(a))$를 포함하는 부분을 확대하면 거의 직선처럼 보인다.



02 미분계수의 의미와 연속성

소단원 지도 목표

① 미분계수의 기하학적 의미를 이해하게 한다.
② 미분 가능성과 연속성의 관계를 이해하게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 미분계수는 곡선 위의 한 점에서의 접선의 기울기를 나타내며 이 점에서의 순간변화율이라는 것을 유의하도록 한다.

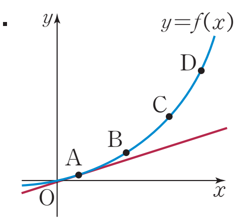
2. 점 Q는 곡선 $y=f(x)$ 위를 따라 점 P에 한없이 가까워지고, 직선 PQ는 일정한 직선 PT에 한없이 가까워진다는 표현에서 '한없이 가까워진다'의 엄밀한 수학적 정의는 고등학교 수준을 넘으므로 직관적으로 이해하게 한다.

3. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이지만, 이 역은 성립하지 않음을 그래프를 통하여 직관적으로 확인하게 한다.

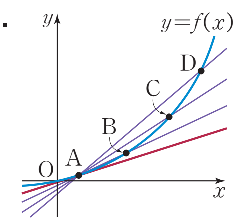
탐구 활동의 이해

활동 목표 • 함수 $y=f(x)$의 그래프 위를 움직이는 점 P가 세 점 D, C, B를 차례로 지나 점 A에 가까워질 때 두 점 A, P를 잇는 직선이 점 A에 접하는 직선에 가까워짐을 통해 미분계수의 기하학적 의미를 알게 하는 것이다.

1.



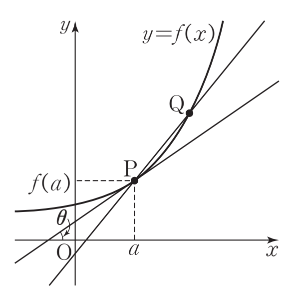
2.



3. 점 A에 접하는 직선에 가까워짐을 알 수 있다.

본문 해설

❶ 미분계수 $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P$(a, f(a))$에서의 접선의 기울기로, 접선과 x축의 양의 방향이 이루는 각을 θ라 하면 기울기는 $\tan\theta$이므로



$$\tan\theta=f'(a)\left(\text{단, } \theta\neq\frac{\pi}{2}\right)$$

로도 설명할 수 있다.

곡선 위의 점 Q를 점 P로 한없이 접근시키면 두 점 P와 Q 사이의 직선의 기울기는 곡선 위의 점 P에서의 접선의 기울기에 한없이 가까워지므로 $f'(a)$를 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기라고 한다.

1

목표| 곡선 위의 점에서의 접선의 기울기를 구할 수 있게 한다.

풀이

(1) $f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{(1+\Delta x)^2+3(1+\Delta x)-(1^2+3\times 1)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{5\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\mathbf{5}$

(2) $f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{-(2+\Delta x)^3+2-(-2^3+2)}{\Delta x}$

$=\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{-12\Delta x-6(\Delta x)^2-(\Delta x)^3}{\Delta x}$

$=\mathbf{-12}$

사고력 기르기 문제 해결

출제 의도| 곡선 위의 두 점에서의 미분계수와 두 점을 잇는 직선의 기울기를 비교하도록 한다.

풀이| (1) $f'(b)<\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<f'(a)$

(2) $g'(a)<\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}<g'(b)$

교과서 94 쪽

이상을 정리하면 다음과 같다.

미분계수의 기하학적 의미

함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기와 같다.

예제 01 곡선 $y=x^2-3x+5$ 위의 점 $(1, 3)$에서의 접선의 기울기를 구하여라.

풀이 $f(x)=x^2-3x+5$로 놓으면 구하는 접선의 기울기는 함수 $f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수 $f'(1)$과 같으므로

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(1+\Delta x)^2-3(1+\Delta x)+5\}-(1^2-3\cdot 1+5)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(-1+\Delta x)$$
$$=-1$$

답 -1

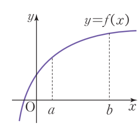
문제 1 다음 곡선 위의 주어진 점에서의 접선의 기울기를 구하여라.

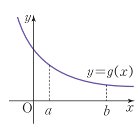
(1) $y=x^2+3x$ $(1, 4)$ (2) $y=-x^3+2$ $(2, -6)$

사고력 기르기

추론
의사소통
▶문제 해결

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 각각 다음 그림과 같을 때, 다음 식의 값의 크기를 비교하여 보자.





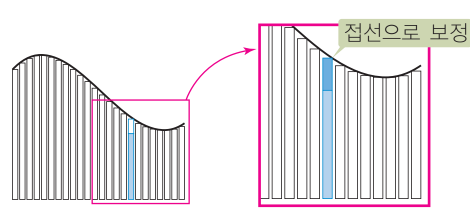
(1) $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, $f'(a)$, $f'(b)$ (2) $\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}$, $g'(a)$, $g'(b)$

지/도/자/료 미분가능의 정의

17세기 이후 발달한 무한의 개념은 엄밀한 수학적 표현을 하기 위하여 $\varepsilon-\delta$논법으로 극한을 정의하고 있다.
$\varepsilon-\delta$논법을 사용하여 함수의 미분가능성을 다음과 같이 정의한다.
함수 $f:[a, b]\longrightarrow R$에서의 임의의 실수 $x\in[a, b]$에 대하여 $L\in R$가 존재하여 「임의의 $\varepsilon>0$에 대하여 이에 대응하는 적당한 $\delta>0$이 존재하여 $0<|x-c|<\delta$, $c\in[a, b]$이면
$\left|\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}-L\right|<\varepsilon$이다.」
를 만족하면 함수 f는 $x=c$에서 미분가능하다고 한다.
이때, f는 $[a, b]$ 위에서 정의된 미분가능한 함수 또는 함수 $f:[a, b]\longrightarrow R$는 미분가능하다고 한다.
또, 함수 f가 $x=c$에서 미분가능하지 않을 때, f는 $x=c$에서 미분불가능하다고 한다.
위의 정의에서 $x=c$에서의 함수 f의 미분가능성은 c의 근방 구간 $(c-\delta, c+\delta)$에서 함수 f의 국부적인 성질이므로 함수 f의 정의역이 c를 포함하는 임의의 구간 I일 경우에도 마찬가지 방법으로 함수의 미분가능성을 정의할 수 있다.

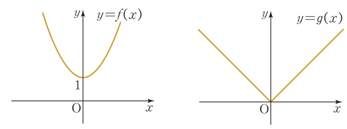
읽/기/자/료 왜 CD는 신호결손이 없을까?

최근 음향, 영상 제품 중에는 콤팩트 디스크, VTR, 레이저 디스크 등 디지털의 특성을 이용한 것이 많아졌다. 이러한 기기는 공기의 파동인 소리가 아날로그적인 것이지만 디지털로 기록한다. 아래 그림과 같이 소리의 파동이 본래는 곡선의 그래프였던 것을 불연속한 미세한 막대그래프로 대응하여 기록하였다가 다시 음을 낼 때에는 아날로그의 형태로 바꾸는데 디지털에서는 잘못된 신호에 의해 전혀 다른 값으로 나오는 경우가 있다. 이러한 신호결손을 보정하기 위하여 접선을 이용한다.



미분가능성과 연속성 사이에는 어떤 관계가 있는가?

탐구 활동 다음 그림은 함수 $f(x)=x^2+1$, $g(x)=|x|$의 그래프이다. 물음에 답하여 보자.



1. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 $x=0$에서 연속인지 불연속인지 조사하여 보자.
2. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능한지 알아보자.

❶ 함수의 미분가능성과 연속성 사이의 관계를 알아보자.

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 미분계수

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

가 존재하므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)\}&=\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)\right\}\\&=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}(x-a)\\&=f'(a)\cdot 0=0\end{aligned}$$

이다. 즉,

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$$

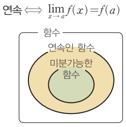
이다. 따라서 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

한편 탐구 활동에서의 함수 $g(x)=|x|$는 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않다. 즉, 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이라고 해서 항상 미분가능한 것은 아니다.

● $\lim_{x\to a}\{f(x)-k\}=0$ $\Longleftrightarrow$ $\lim_{x\to a}f(x)=k$ (k는 상수)

이상을 정리하면 다음과 같다.

● 함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 연속 $\Longleftrightarrow$ $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$



미분가능성과 연속성 사이의 관계

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.
그러나 그 역은 일반적으로 성립하지 않는다.

참고 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이 아니면 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하지 않다.

본문 해설

❶ 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

가 존재하므로 이를 이용하여 $\lim_{\Delta x\to 0}f(a+\Delta x)=f(a)$가 성립함을 증명하여 보자.

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta x\to 0}\{f(a+\Delta x)-f(a)\}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\right\}\cdot\Delta x\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}\right\}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\\&=f'(a)\cdot 0\\&=0\end{aligned}$$

즉, $\lim_{\Delta x\to 0}f(a+\Delta x)=f(a)$

따라서 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이다.

이상에서 살펴본 바와 같이 미분가능하다는 것은 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다. 즉, $x=a$에서 미분가능한 함수 전체의 집합은 $x=a$에서 연속인 함수 전체의 집합의 부분집합이다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 두 함수 $f(x)=x^2+1$, $g(x)=|x|$가 $x=0$에서 미분가능하지를 알아보는 활동을 통해 미분가능성과 연속성의 관계를 이해하게 하려는 것이다.

1. $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)=1$, $\lim_{x\to 0}g(x)=g(0)=0$이다.

즉, 두 함수 $f(x)=x^2+1$, $g(x)=|x|$가 $x=0$에서 연속이다.

2. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하고 미분계수 $f'(0)=0$이다.

함수 $g(x)$는

$$\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{g(0+\Delta x)-g(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=1$$

$$\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{g(0+\Delta x)-g(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=-1$$

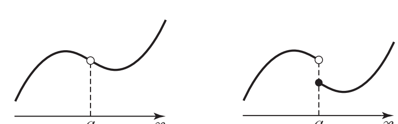
즉, 함수 $g(x)=|x|$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

지/도/자/료 그래프의 모양과 미분가능

함수의 그래프의 모양을 보고 미분가능을 판단할 수 있다.

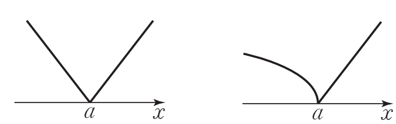
(1) $x=a$에서 연속이 아닌 경우

연속이 아니면 미분가능하지 않고 그래프는 다음 그림과 같이 끊어져 있다.



(2) $x=a$에서 연속이지만 미분가능하지 않은 경우

연속함수에서 평균변화율 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$에 대하여 $\Delta x\to 0$일 때 극한값이 존재하지 않는 경우에는 다음 그림과 같이 $x=a$에서 뾰족하다.



2

목표| 미분가능성과 연속성의 관계에 대하여 알게 한다.

풀이| $f(3)=0,\ \lim_{x\to3}f(x)=\lim_{x\to3}|3x-9|=0$

이므로

$\lim_{x\to3}f(x)=f(3)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

한편

$$\lim_{x\to3+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to3+}\frac{3(x-3)}{x-3}=3$$

$$\lim_{x\to3-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to3-}\frac{-3(x-3)}{x-3}=-3$$

이므로 $\lim_{x\to3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}$은 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)=|3x-9|$는 $x=3$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

교과서 96 쪽

예제 02 함수 $f(x)=|x^2-1|$은 $x=1$에서 연속이지만 미분가능하지 않음을 보여라.

풀이 $f(1)=0,\ \lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}|x^2-1|=0$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

따라서 함수 $f(x)=|x^2-1|$은 $x=1$에서 연속이다.

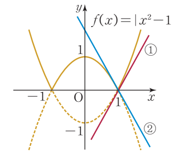
한편

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(x^2-1)-0}{x-1}=2$$

(직선 ①의 기울기)

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{-(x^2-1)-0}{x-1}=-2$$

(직선 ②의 기울기)



이므로 $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$은 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)=|x^2-1|$은 $x=1$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

문제 2 함수 $f(x)=|3x-9|$는 $x=3$에서 연속이지만 미분가능하지 않음을 보여라.

발전

문제 3 함수 $f(x)=\begin{cases}x^2 & (x\ge0)\\ -x^2 & (x<0)\end{cases}$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(1) 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속인가?

(2) 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능한가?

사고력 기르기

추론
▶의사소통
문제 해결

함수 $f(x)=\begin{cases}x^2-5x+4 & (x\ge1)\\ -x & (x<1)\end{cases}$에 대한 대화를 보고, $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$을 확인하지 않고도 이 함수가 $x=1$에서 미분가능한지 알 수 있는 이유에 대하여 토의하여 보자.

3

목표| 미분가능성과 연속성의 관계에 대하여 알게 한다.

풀이| (1) $\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}x^2=0$

$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}(-x^2)=0$

이므로 $\lim_{x\to0}f(x)=0$

이때 $f(0)=0^2=0$이므로

$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 **연속이다**.

(2) $\lim_{x\to0+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0+}\dfrac{x^2}{x}=0$

$\lim_{x\to0-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0-}\dfrac{-x^2}{x}=0$

이므로 $\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 **미분가능**하다.

사고력 기르기 의사소통

출제 의도| 함수 $f(x)$는 연속이지만 $x=1$에서 함수 $f(x)$의 좌극한과 우극한을 알아보고 $x=1$에서 미분가능하지 않음을 알게 한다. 즉 미분가능하면 연속이지만 연속이라고 하여 미분가능한 것은 아님을 이해하게 한다.

풀이| 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다. 따라서 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 불연속이면 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

그런데 $\lim_{x\to1-}f(x)=-1,\ \lim_{x\to1+}f(x)=0$이므로

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하지 않음을 알 수 있다.

03 도함수

● 함수 $y=x^n$ (n은 양의 정수)의 도함수를 구할 수 있다.
● 함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.

도함수란 무엇인가?

생각 열기

탐구 활동

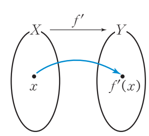
함수 $f(x)=x^2$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. $x=1$에서의 미분계수 $f'(1)$을 구하여 보자.
2. $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$를 구하여 보자.
3. **2**의 결과를 이용하여 다음 표를 완성하여 보자.

a	1	2	3	4
$f'(a)$				

임의의 실수 a에 대하여 함수 $f(x)=x^2$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 $f'(a)=2a$이다. 따라서 실수 a의 값에 따라 미분계수 $f'(a)$의 값이 하나씩 정해진다.

일반적으로 함수 $y=f(x)$가 미분가능한 각 점 x에 대하여 미분계수 $f'(x)$를 대응시켜 만든 새로운 함수를 함수 $y=f(x)$의 **도함수**라 하고, 이것을 기호로



$$f'(x),\quad y',\quad \frac{dy}{dx},\quad \frac{d}{dx}f(x)$$

와 같이 나타낸다. 즉,

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

이다.

● $\frac{dy}{dx}$는 dy를 dx로 나눈다는 뜻이 아니라, y를 x에 대하여 미분한다는 뜻이다.

03 도함수

소단원 지도 목표

① 도함수의 뜻을 이해하게 한다.
② 도함수를 나타내는 기호를 알고, 정의에 의하여 도함수를 구할 수 있게 한다.
③ $f(x)=x^n$ (n은 양의 정수)의 도함수를 구하고, 그것을 활용할 수 있게 한다.
④ 함수의 실수배, 합, 차, 곱에 대한 도함수의 유도 과정을 이해하고, 그 결과를 공식으로 활용할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, a에 $f'(a)$를 대응시키는 함수를 정의할 수 있음을 알게 한다.

2. 도함수를 정의에 의하여 구하여 보고, 이것은 결국 임의의 점 x에서 미분계수를 구하는 것과 같은 것임을 이해하도록 지도한다.

3. 도함수의 기호 $\frac{dy}{dx}$를 dy를 dx로 나눈 분수로 생각하지 않도록 지도한다.

새로 나온 용어와 기호

• 도함수(導函數, derivatives)
• y', $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d}{dx}f(x)$

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 주어진 함수 $f(x)$에 대하여 미분계수 $f'(1)$, $f'(2)$, $f'(3)$, $f'(4)$를 구하는 과정을 통해 a에 $f'(a)$를 대응시키는 새로운 함수를 발견하게 하려는 것이다.

1.
$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\Delta x)^2-1^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1+2\Delta x+(\Delta x)^2-1^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x)=\mathbf{2}$$

2.
$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(a+\Delta x)^2-a^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^2+2a\Delta x+(\Delta x)^2-a^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2a+\Delta x)=\mathbf{2a}$$

3.

a	1	2	3	4
$f'(a)$	**2**	**4**	**6**	**8**

읽/기/자/료

세상의 모든 것은 변하고 있다. 예를 들면 모양, 위치, 온도 등은 시간에 따라 바뀐다.
뉴턴은 점이 움직여서 선이 만들어지고, 선이 움직여서 면이 만들어진다고 생각하였고, 모든 것을 변화의 관점에서 사고하였다. 이와 같이 변하는 것들에 대하여 변화의 양상을 설명하고자 발달된 것이 미분이다.
한편 곡선은 극히 작은 부분만 보면 직선이고, 곡면도 작은 부분만 보면 평면이 된다. 극히 작은 부분에 관심을 가지는 것이 미분적 사고이며, 미분에서는 미분적 사고를 필요로 한다.

교과서 98 쪽

❶ 예를 들어 함수 $y=f(x)$에서 $f(x)=x^2$일 때, $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=2x,\quad y'=2x,\quad \frac{dy}{dx}=2x,\quad \frac{d}{dx}f(x)=2x$$

와 같이 나타낼 수 있다.

함수 $y=f(x)$에서 도함수 $f'(x)$를 구하는 것을 함수 $f(x)$를 x에 대하여 미분한다고 하며, 그 계산법을 미분법이라고 한다.

또 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 도함수 $f'(x)$의 식에 $x=a$를 대입한 값이다.

❷ 이상을 정리하면 다음과 같다.

Δx 대신에 h를 대입하면

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

도함수의 정의

함수 $y=f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

예제 01 다음 함수의 도함수를 구하고, $x=1$에서의 미분계수를 구하여라.

(1) $f(x)=2x+3$　　(2) $f(x)=4x^2$

풀이 (1) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{2(x+h)+3-(2x+3)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}2=2$

따라서 $f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수는 $f'(1)=2$

(2) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{4(x+h)^2-4x^2}{h}$

$=\lim_{h\to 0}(8x+4h)=8x$

따라서 $f(x)$의 $x=1$에서의 미분계수는 $f'(1)=8\cdot 1=8$

답 (1) $f'(x)=2$, $f'(1)=2$　(2) $f'(x)=8x$, $f'(1)=8$

문제 1 다음 함수의 도함수를 구하고, $x=2$에서의 미분계수를 구하여라.

(1) $f(x)=50$　　(2) $f(x)=x+3$

(3) $f(x)=x^2-7x$　　(4) $f(x)=x^3$

본문 해설

❶ 함수 $f(x)$의 정의역 X에 속하는 임의의 원소 x에 대하여 미분계수 $f'(x)$를 대응시키면 새로운 함수 $f': x \longrightarrow f'(x)$가 정해진다. 이 함수 $f'(x)$를 함수 $f(x)$의 도함수라고 한다.

함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

이고, 기호로

$$f'(x),\ y',\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d}{dx}f(x)$$

와 같이 나타내며 편의에 따라 적절히 사용한다.

도함수를 x의 각 값에 미분계수를 대응시키는 함수로 파악하도록 하고, 역으로 도함수의 x에 특정한 값을 대입한 값이 특정한 x의 값에서의 미분계수임을 이해하게 한다.

❷ 도함수의 정의는 다음과 같이 여러 가지 형태로 나타낼 수 있다.

(1) $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

(2) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

도함수를 구할 때는 보통 (2)를 많이 사용하지만 문제 상황에 따라 적절하게 이용하도록 한다.

1

목표 | 도함수의 정의를 이용하여 도함수를 구할 수 있게 한다.

풀이 | (1) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{50-50}{h}=0$

따라서 $f(x)$의 $x=2$에서의 미분계수는 $f'(2)=\mathbf{0}$

(2) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)+3-(x+3)}{h}=1$

따라서 $f(x)$의 $x=2$에서의 미분계수는 $f'(2)=\mathbf{1}$

(3) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-7(x+h)-(x^2+7x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2-7h}{h}$

$=\lim_{h\to 0}(2x-7+h)=2x-7$

따라서 $f(x)$의 $x=2$에서의 미분계수는

$f'(2)=\mathbf{-3}$

(4) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}$

$=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2$

따라서 $f(x)$의 $x=2$에서의 미분계수는

$f'(2)=\mathbf{12}$

교과서 99 쪽

함수 $y=x^n$ (n은 양의 정수)의 도함수는 어떻게 구하는가?

탐구 활동 세 함수 $y=x$, $y=x^2$, $y=x^3$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

1. 위의 세 함수의 도함수를 각각 구하여 보자.

2. **1**의 결과로부터 함수 $y=x^4$의 도함수를 추측하여 보자.

이제 도함수의 정의를 이용하여 양의 정수 n에 대하여 함수 $f(x)=x^n$의 도함수를 구하여 보자.

a^n-b^n
$=(a-b)$
$\times(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})$

$$\begin{aligned} f'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}\\ &=\lim_{h\to0}\frac{\{(x+h)-x\}\{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+x^{n-1}\}}{h}\\ &=\lim_{h\to0}\frac{h\{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+x^{n-1}\}}{h}\\ &=\lim_{h\to0}\{(x+h)^{n-1}+(x+h)^{n-2}x+\cdots+x^{n-1}\}\\ &=\underbrace{x^{n-1}+x^{n-1}+\cdots+x^{n-1}}_{n\text{개}}\\ &=nx^{n-1} \end{aligned}$$

특히 상수함수 $f(x)=c$ (c는 상수)의 도함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &=\lim_{h\to0}\frac{c-c}{h}=0 \end{aligned}$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

1 $(x^n)'=nx^{n-1}$

> **$y=x^n$과 상수함수의 도함수**
> (1) $y=x^n$ (n은 양의 정수)이면 $y'=nx^{n-1}$
> (2) $y=c$ (c는 상수)이면 $y'=0$

보기 두 함수 $y=x^5$, $y=3$의 도함수는 각각 $y'=5x^4$, $y'=0$이다.

문제 2 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $y=x^9$　(2) $y=x^{11}$　(3) $y=\frac{2}{5}$　(4) $y=\sqrt{7}$

탐구 활동의 이해

활동 목표 • $y=x$, $y=x^2$, $y=x^3$의 도함수를 정의에 의하여 구하여 보고, 이를 통하여 $f(x)=x^n$ (n은 양의 정수)의 도함수를 발견하여 일정한 규칙이 있음을 추측하게 하려는 것이다.

1. 함수 $y=f(x)$에 대하여

$f(x)=x$인 경우

$$\begin{aligned} f'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &=\lim_{h\to0}\frac{x+h-x}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h}{h}=1 \end{aligned}$$

$f(x)=x^2$인 경우

$$\begin{aligned} f'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}\\ &=\lim_{h\to0}\frac{2xh+h^2}{h}=\lim_{h\to0}(2x+h)=2x \end{aligned}$$

$f(x)=x^3$인 경우

$$\begin{aligned} f'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}\\ &=\lim_{h\to0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}\\ &=\lim_{h\to0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2 \end{aligned}$$

2. $\boldsymbol{y'=4x^3}$**으로 추측할 수 있다.**

본문 해설

1 n이 자연수일 때,

$(x^n)'=nx^{n-1}$　　…… ㉠

임을 수학적 귀납법을 이용하여 다음과 같이 증명할 수도 있다.

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$=$(우변)$=1$

따라서 $n=1$일 때 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, ㉠이 성립한다고 가정하면

$(x^k)'=kx^{k-1}$

$n=k+1$일 때

$$\begin{aligned} &(x^{k+1})'\\ &=\lim_{\varDelta x\to0}\frac{(x+\varDelta x)^{k+1}-x^{k+1}}{\varDelta x}\\ &=\lim_{\varDelta x\to0}\frac{(x+\varDelta x)(x+\varDelta x)^k-x^{k+1}}{\varDelta x}\\ &=\lim_{\varDelta x\to0}\left\{\frac{x(x+\varDelta x)^k-x^{k+1}}{\varDelta x}+\frac{\varDelta x(x+\varDelta x)^k}{\varDelta x}\right\}\\ &=x\lim_{\varDelta x\to0}\frac{(x+\varDelta x)^k-x^k}{\varDelta x}+\lim_{\varDelta x\to0}(x+\varDelta x)^k\\ &=x(x^k)'+x^k=x(kx^{k-1})+x^k=(k+1)x^k \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$일 때에도 ㉠이 성립한다.

그러므로 (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

2

목표 | $y=x^n$ 상수함수의 도함수를 구할 수 있게 한다.

풀이 | (1) $\boldsymbol{y'=9x^8}$　(2) $\boldsymbol{y'=11x^{10}}$

(3) $\boldsymbol{y'=0}$　(4) $\boldsymbol{y'=0}$

교과서 100 쪽

함수의 실수배, 합, 차, 곱은 어떻게 미분하는가?

미분가능한 함수의 실수배, 합, 차로 이루어진 함수의 도함수를 구하여 보자.

[1] 함수 $f(x)$가 미분가능할 때, $y=cf(x)$(c는 상수)라고 하면

$$y'=\lim_{h\to0}\frac{cf(x+h)-cf(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{c\{f(x+h)-f(x)\}}{h}$$
$$=c\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=cf'(x)$$

이다.

[2] 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 각각 미분가능할 때, $y=f(x)+g(x)$라고 하면

$$y'=\lim_{h\to0}\frac{\{f(x+h)+g(x+h)\}-\{f(x)+g(x)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}+\{g(x+h)-g(x)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$
$$=f'(x)+g'(x)$$

이다.

$\{f(x)-g(x)\}'$
$=\{f(x)+(-1)g(x)\}'$
$=f'(x)-g'(x)$

[3] [2]와 같은 방법으로 $y=f(x)-g(x)$의 도함수를 구하면

$$y'=f'(x)-g'(x)$$

임을 알 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

❶ **함수의 실수배, 합, 차의 미분법**

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때
(1) $\{cf(x)\}'=cf'(x)$ (단, c는 상수)
(2) $\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$
(3) $\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$

❷ 참고 함수의 합, 차의 미분법은 세 개 이상의 함수에 대해서도 성립한다. 예를 들어 $\{f(x)+g(x)+h(x)\}'=f'(x)+g'(x)+h'(x)$이다.

본문 해설

❶ 상수함수 x^n의 도함수를 구한 후에 $cf(x)$, $f(x)\pm g(x)$의 도함수의 성질을 유도한 후, 다항함수의 미분법에 활용할 수 있게 한다.

일반적으로 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\cdots$, $f_n(x)$의 도함수가 존재할 때, 공식 (2)를 반복하여 적용하거나 수학적 귀납법에 의하면

$\{f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)\}'$
$=f_1'(x)+f_2'(x)+\cdots+f_n'(x)$

가 성립함을 알 수 있다.

또, (1), (2)에 의하면 임의의 상수 h, k에 대하여

$\{hf(x)+kg(x)\}'=hf'(x)+kg'(x)$

가 성립함을 알 수 있으며, 여기서 $h=1$, $k=-1$인 경우가 (3)임을 알 수 있다.

❷ 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 각각 미분가능할 때, $y_1=f(x)+g(x)$라고 하면 $y_1'=f'(x)+g'(x)$이므로 $y=f(x)+g(x)+h(x)$의 도함수는 $y=y_1+h(x)$에서

$y'=y_1'+h'(x)=f'(x)+g'(x)+h'(x)$

임을 알 수 있다.

즉, 두 함수의 합의 미분법은 세 함수로도 확장할 수 있다.

지/도/자/료

1. 다항함수

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$
(단, a_i는 상수, $i=0$, 1, 2, $\cdots$, n)

의 도함수를 구하기 위해서는 다음과 같이 함수의 실수배, 합, 차 곱의 미분법의 공식을 활용한다.

$f'(x)$
$=(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0)'$
$=(a_nx^n)'+(a_{n-1}x^{n-1})'+\cdots+(a_1x)'+(a_0)'$
$=a_n(x^n)'+a_{n-1}(x^{n-1})'+\cdots+a_1x'+0$
$=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_1$

2. 미분계수와 도함수의 정의는 기본적으로 극한을 이용하고 있으므로 도함수도 극한의 성질이 성립함을 설명하도록 한다. 즉, 함수의 극한에 대한 성질

$\lim_{x\to a}cf(x)=c\lim_{x\to a}f(x)$
$\lim_{x\to a}\{f(x)\pm g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x)$

를 이용하여 함수의 실수배, 합 · 차의 미분법의 공식이 유도됨을 환기시켜 준다.

또, 일반적으로 $\{f(x)g(x)\}'$은 $f'(x)g'(x)$와 같지 않음을 주의하도록 한다.

교과서 101 쪽

예제 02 함수 $y=2x^3-4x^2+3x+1$을 미분하여라.

풀이 $y'=(2x^3-4x^2+3x+1)'$
$=(2x^3)'-(4x^2)'+(3x)'+(1)'$
$=2(x^3)'-4(x^2)'+3(x)'+(1)'$
$=2\cdot 3x^2-4\cdot 2x+3\cdot 1+0$
$=6x^2-8x+3$

답 $y'=6x^2-8x+3$

문제 3 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=x^3-6x^2+4$ (2) $y=x^4-x^3+2x^2+4$

미분가능한 두 함수의 곱으로 이루어진 함수의 도함수를 구하여 보자.

❶ 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 각각 미분가능할 때, $y=f(x)g(x)$라고 하면

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

이다. 여기서 분자에 $f(x)g(x+h)$를 빼고 더하면

$$\begin{aligned}y'&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x+h)+f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}g(x+h)+f(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\&=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\end{aligned}$$

이다.

함수 $g(x)$가 미분가능하면 연속이므로 $\lim_{h\to 0}g(x+h)=g(x)$

이상을 정리하면 다음과 같다.

❷ **함수의 곱의 미분법**
두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때
$$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

곱의 미분법의 증명은 복잡하므로 쉬운 예를 들어 설명한다. 이때, 전개하여 미분한 결과와 곱의 미분법을 이용하여 미분한 결과가 서로 같음을 확인하게 하여 학생이 쉽게 이해하게 한다.

❷ $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$는 세 개 이상의 함수의 곱의 미분법에 대해서도 같은 방법으로 적용할 수 있다.
즉, 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 미분가능할 때,

$$\begin{aligned}&\{f(x)g(x)h(x)\}'\\&=\{f(x)g(x)\}'h(x)+\{f(x)g(x)\}h'(x)\\&=\{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\}h(x)\\&\quad+\{f(x)g(x)\}h'(x)\\&=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)\\&\quad+f(x)g(x)h'(x)\end{aligned}$$

3

목표| 실수배, 합, 차의 미분법 공식을 이용하여 함수를 미분할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y'=(x^3-6x^2+4)'$
$=(x^3)'-(6x^2)'+(4)'$
$=\mathbf{3x^2-12x}$

(2) $y'=(x^4-x^3+2x^2+4)'$
$=(x^4)'-(x^3)'+(2x^2)'+(4)'$
$=\mathbf{4x^3-3x^2+4x}$

본문 해설

❶ 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 곱 $f(x)g(x)$의 도함수를 구할 때, 미분가능한 함수 $g(x)$는 연속이므로 $g(x+h)=g(x)$를 이용한다.

지/도/자/료 $\{f(x)\}^n$의 도함수

곱의 미분법의 공식을 이용하여 $\{f(x)\}^n$의 도함수를 유도할 수 있다.
$\{f(x)\}^2=f^2$, $\{f(x)\}^3=f^3$, …으로 나타내고
$f(x)f(x)=f\cdot f$로 나타내면
$(f^2)'=(f\cdot f)'=f'\cdot f+f\cdot f'=2f\cdot f'$
$(f^3)'=(f\cdot f\cdot f)'=f'\cdot f\cdot f+f\cdot f'\cdot f+f\cdot f\cdot f'=3f^2\cdot f'$
⋮
$(f^n)'=(f\cdot f\cdots f)'=nf^{n-1}\cdot f'$
따라서 $\{f(x)\}^n$의 도함수는 $n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$이다.

4

목표| 곱의 미분법을 이용하여 미분할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y'=(x^2-2x)'(x^3-1)$
$+(x^2-2x)(x^3-1)'$
$=\mathbf{5x^4-8x^3-2x+2}$

(2) $y'=(2x^2+2)'(x-1)+(2x^2+2)(x-1)'$
$=\mathbf{6x^2-4x+2}$

(3) $y'=(x^3+x)'(2x-5)+(x^3+x)(2x-5)'$
$=\mathbf{8x^3-15x^2+4x-5}$

(4) $y'=(x^3-3)'(2x^2-x+1)$
$+(x^3-3)(2x^2-x+1)'$
$=\mathbf{10x^4-4x^3+3x^2-12x+3}$

5

목표| 곱의 미분법을 이용하여 미분할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y=(x^2-x)(2x+3)$에서
$y'=(x^2-x)'(2x+3)$
$+(x^2-x)(2x+3)'$
$=\mathbf{6x^2+2x-3}$

(2) $y=(x^2+3x+2)(x^2+3)$에서
$y'=(x^2+3x+2)'(x^2+3)$
$+(x^2+3x+2)(x^2+3)'$
$=\mathbf{4x^3+9x^2+10x+9}$

교과서 102 쪽

예제 03 함수 $y=(x+2)(x^2-5x-3)$을 미분하여라.

풀이 $y'=\{(x+2)(x^2-5x-3)\}'$
$=(x+2)'(x^2-5x-3)+(x+2)(x^2-5x-3)'$
$=1\cdot(x^2-5x-3)+(x+2)\cdot(2x-5)$
$=3x^2-6x-13$

답 $y'=3x^2-6x-13$

문제 4 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=(x^2-2x)(x^3-1)$ (2) $y=(2x^2+2)(x-1)$

(3) $y=(x^3+x)(2x-5)$ (4) $y=(x^3-3)(2x^2-x+1)$

발전 문제 5 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=x(x-1)(2x+3)$ (2) $y=(x+1)(x+2)(x^2+3)$

사고력 기르기

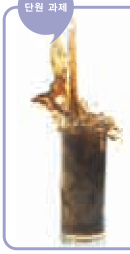
추론
의사소통
▶문제 해결

다음 물음에 답하여 보자.

(1) 함수 $f(x)$가 미분가능할 때, 함수 $y=\{f(x)\}^2$의 도함수가 $y'=2f(x)f'(x)$임을 설명하여 보자.

(2) (1)을 이용하여 다항식 x^7-x^3+5를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지를 구하여 보자.

단원 과제

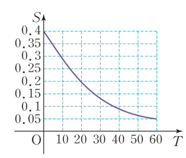


앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 온도가 T ℃일 때, 탄산음료 100 g당 녹아 있는 이산화탄소의 양 S g은

$$S(T)=A(T-60)^2+0.05\,(0\le T\le 60)$$

라고 한다. 다음 물음에 답하여라. (단, $A=9.7\times10^{-5}$)



(1) 도함수 $S'(T)$를 구하고, 그 의미를 설명하여라.

(2) 온도가 각각 10 ℃, 20 ℃인 탄산음료가 있다. 그래프를 이용하여 톡 쏘는 맛이 순간적으로 크게 느껴지는 탄산음료를 찾아라.

사고력 기르기 문제 해결

출제 의도| 미분법 공식을 이용하여 $y=\{f(x)\}^2$을 미분하고 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y=\{f(x)\}^2=f(x)f(x)$이므로
$y'=f'(x)f(x)+f(x)f'(x)=2f(x)f'(x)$

(2) x^7-x^3+5를 $(x-1)^2$으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$라고 하면

$x^7-x^3+5=(x-1)^2Q(x)+ax+b$ …… ①

①에 $x=1$을 대입하면 $a+b=5$

①을 x에 대하여 미분하면

$7x^6-3x^2=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$ …… ②

②에 $x=1$을 대입하면 $a=4$

$a=4$, $b=1$이므로 나머지는 $\mathbf{4x+1}$

단원 과제

목표| 미분법 공식을 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

지도의 유의점| 함수 S를 T에 대한 함수로 보고 미분할 수 있도록 지도한다.

풀이| (1) $S'(T)=2A(T-60)\,(A=9.7\times10^{-5})$

$S'(T)$는 온도 T에서 탄산음료 100 g당 녹아 있는 이산화탄소의 양의 순간변화율이다. 따라서 온도가 순간적으로 변할 때 탄산음료의 톡 쏘는 맛의 정도를 알 수 있다.

(2) **온도가 10 ℃인 탄산음료**

교과서 103 쪽

중단원 기초

[해답 p.202]

수준별 학습

1 함수 $f(x)=2x^2-3$에 대하여 x의 값이 -1에서 2까지 변할 때, 다음을 구하여라.

(1) x의 증분　　(2) y의 증분　　(3) 평균변화율

01 미분계수 평균변화율

2 다음 함수의 $x=4$에서의 미분계수를 정의를 이용하여 구하여라.

(1) $f(x)=4x+3$　　(2) $f(x)=3$

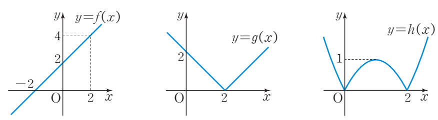
01 미분계수

3 다음 곡선 위의 주어진 점에서의 접선의 기울기를 구하여라.

(1) $y=3x^2$ $(1,\ 3)$　　(2) $y=-x^3+1$ $(-1,\ 2)$

02 미분계수의 의미와 연속성 미분계수의 기하학적 의미

4 세 함수 $f(x)=x+2$, $g(x)=|x-2|$, $h(x)=|x^2-2x|$의 그래프가 각각 다음과 같을 때, $x=2$에서 미분가능성과 연속성을 조사하여라.



02 미분계수의 의미와 연속성 미분가능성과 연속성

5 도함수의 정의를 이용하여 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $f(x)=5$　　(2) $f(x)=x^2-2x$

03 도함수 도함수의 정의

6 다음 함수를 미분하여라.

(1) $y=x^8$　　(2) $y=\pi$

(3) $y=3x^2-4x+6$　　(4) $y=2x^5-\frac{1}{2}x^4-x+5$

(5) $y=(2x-5)(x^2+x-1)$　　(6) $y=(x+2)(7x^3-x+4)$

03 도함수 실수배, 합, 차, 곱의 미분법

중/단/원 기초

1

목표| x의 증분, y의 증분, 평균변화율을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) **3**　　(2) **6**　　(3) $\frac{6}{3}=\mathbf{2}$

2

목표| 미분계수를 정의를 이용하여 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $f'(4)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(4+\Delta x)-f(4)}{\Delta x}=\mathbf{4}$

(2) $f'(4)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(4+\Delta x)-f(4)}{\Delta x}=\mathbf{0}$

3

목표| 미분계수의 기하학적 의미를 알게 하고 접선의 기울기를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $f(x)=3x^2$이라고 하면

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\mathbf{6}$$

(2) $f(x)=-x^3+1$이라고 하면

$$f'(-1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}=\mathbf{-3}$$

4

목표| 미분가능성과 연속성을 조사할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\lim_{x\to 2}f(x)=4$, $f(2)=4$이므로

$x=2$에서 연속이고 $f'(2)=1$,

$x=2$에서 미분가능하다.

(2) $\lim_{x\to 2}g(x)=0$, $g(2)=0$이므로

$x=2$에서 연속이고

$$\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\frac{x-2}{x-2}=1,$$

$$\lim_{x\to 2-}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\frac{-(x-2)}{x-2}=-1$$

따라서 **$x=2$에서 미분가능하지 않다.**

(3) $\lim_{x\to 2}h(x)=0$, $h(2)=0$이므로

$x=2$에서 연속이고

$$\lim_{x\to 2+}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}=\frac{x(x-2)}{x-2}=2,$$

$$\lim_{x\to 2-}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}=\frac{-x(x-2)}{x-2}=-2$$

따라서 **$x=2$에서 미분가능하지 않다.**

5

목표| 도함수의 정의를 이용하여 도함수를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\mathbf{0}$

(2) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\mathbf{2x-2}$

6

목표| 미분법 공식을 이용하여 함수를 미분할 수 있게 한다.

풀이| (1) $y'=\mathbf{8x^7}$　　(2) $y'=\mathbf{0}$

(3) $y'=\mathbf{6x-4}$　　(4) $y'=\mathbf{10x^4-2x^3-1}$

(5) $y'=\mathbf{6x^2-6x-7}$　　(6) $y'=\mathbf{28x^3+42x^2-2x+2}$

교과서 104 쪽

중단원 기본

[해답 p.202]

수준별 학습

1 함수 $f(x)=x^2-3x$에 대하여 x의 값이 0에서 2까지 변할 때의 평균변화율과 $x=c$에서의 미분계수가 같을 때, 상수 c의 값을 구하여라.

01 미분계수 평균변화율과 미분계수

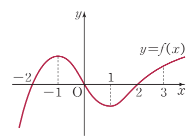
2 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=5$일 때, 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(a+2\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$　　(2) $\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(a+5\Delta x)-f(a-\Delta x)}{\Delta x}$

01 미분계수

3 오른쪽 그림은 모든 실수에서 미분가능한 함수 $y=f(x)$의 그래프를 나타낸 것이다. 다음의 값을 큰 수부터 차례로 나열하여라.

$f'(-2), f'(-1), f'(0), f'(2), f'(3)$



02 미분계수의 의미와 연속성 미분계수의 기하학적 의미

4 함수 $f(x)=\begin{cases}4x-b & (x<1)\\ ax^2 & (x\ge 1)\end{cases}$이 모든 실수에서 미분가능할 때, 두 상수 a, b의 값을 각각 구하여라.

02 미분계수의 의미와 연속성 연속성과 미분가능성

5 다항식 x^3+ax^2+b가 $(x-2)^2$으로 나누어떨어질 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

03 도함수 곱의 미분법

중/단/원 기본

1

목표| 평균변화율과 미분계수를 구할 수 있게 한다.

풀이| x의 값이 0에서 2까지 변할 때의 평균변화율은 $\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{-2}{2}=-1$

$f'(x)=2x-3$에서 $x=c$에서의 미분계수 $f'(c)$는 $f'(c)=2c-3$

따라서 $2c-3=-1$에서 $\boldsymbol{c=1}$

2

목표| 미분계수의 정의를 이용하여 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) (주어진 식)

$$=\lim_{\Delta x \to 0}2\frac{f(a+2\Delta x)-f(a)}{2\Delta x}=2f'(a)$$

$$=2\times5=\mathbf{10}$$

(2) (주어진 식)

$$=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(a+5\Delta x)-f(a)-\{f(a-\Delta x)-f(a)\}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x \to 0}5\frac{f(a+5\Delta x)-f(a)}{5\Delta x}$$

$$-\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\{f(a-\Delta x)-f(a)\}}{-\Delta x}\times(-1)$$

$$=5f'(a)+f'(a)=6f'(a)=\mathbf{30}$$

3

목표| 그래프에서 미분계수의 기하학적 의미를 이해하게 한다.

풀이| 주어진 그래프 위의 각 점에서의 접선을 그려보고 기울기를 비교하여 큰 수부터 차례대로 나열하면

$\boldsymbol{f'(-2), f'(2), f'(3), f'(-1), f'(0)}$이다.

4

목표| 연속성과 미분가능성을 이용하여 미정계수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 함수 $f(x)$의 $x=1$에서의 평균변화율의 좌극한은

$$\lim_{h\to1-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to1-}\frac{4h}{h}=4$$

우극한은 $\lim_{h\to1+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to1+}\frac{2ah+h^2}{h}=2a$

함수 $f(x)$가 모든 실수에서 미분가능하므로

$4=2a$, $\boldsymbol{a=2}$

또 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{h\to1-}4x-b=\lim_{h\to1+}2x^2=f(1)=2$

따라서 $\boldsymbol{b=2}$

5

목표| 곱의 미분법을 나머지정리에 활용할 수 있게 한다.

풀이| x^3+ax^2+b를 $(x-2)^2$으로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 하면

$x^3+ax^2+b=(x-2)^2Q(x)$ ······ ㉠

㉠에 $x=2$를 대입하면 $8+4a+b=0$

㉠의 양변을 미분하면

$3x^2+2ax=2(x-2)Q(x)+(x-2)^2Q'(x)$ ······ ㉡

㉡에 $x=2$를 대입하면 $12+4a=0$, $a=-3$

이때 $a=-3$을 $8+4a+b=0$에 대입하면 $b=4$

따라서 $\boldsymbol{a+b=1}$

교과서 105 쪽

중단원 실력

[해답 p.203]

수준별 학습

1 함수 $y=f(x)$에 대하여 x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 평균변화율은 5이고, x의 값이 3에서 4까지 변할 때의 평균변화율은 2이다. 이때 x의 값이 1에서 4까지 변할 때의 평균변화율을 구하여라.

01 미분계수 평균변화율

2 함수 $f(x)$가 $f(2)=3$, $f'(2)=2$를 만족시킬 때, $\lim_{x\to2}\frac{x^2f(2)-2^2f(x)}{x-2}$의 값을 구하여라.

01 미분계수

3 함수 $f(x)=x^n|x|$ $(n=-1,\ 0,\ 1)$의 $x=0$에서의 연속성과 미분가능성을 조사하여라.

02 미분계수의 의미와 연속성

4 미분가능한 함수 $f(x)$가 임의의 두 실수 x, y에 대하여

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

를 만족시키고 $f'(5)=7$일 때, 도함수 $f'(x)$를 구하여라.

03 도함수 도함수의 정의

5 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-5}{x-2}=3,\ \lim_{x\to2}\frac{g(x)-3}{x-2}=4$$

가 성립할 때, 함수 $y=f(x)g(x)$의 $x=2$에서의 미분계수를 구하여라.

03 도함수 곱의 미분법

중/단/원 실력

1

목표| 평균변화율을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=5$이므로

$f(3)-f(1)=10$ $\cdots\cdots$ ①

$\frac{f(4)-f(3)}{4-3}=2$이므로

$f(4)-f(3)=2$ $\cdots\cdots$ ②

①과 ②를 변끼리 더하면 $f(4)-f(1)=12$

따라서 $\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{12}{3}=\mathbf{4}$

2

목표| 미분계수의 정의를 이용하여 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\lim_{x\to2}\frac{x^2f(2)-2^2f(x)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\frac{x^2f(2)-2^2f(2)+2^2f(2)-2^2f(x)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\frac{(x^2-2^2)f(2)-2^2\{f(x)-f(2)\}}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}(x+2)f(2)-2^2\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$=4f(2)-2^2f'(2)$

$=4\cdot3-4\cdot2=\mathbf{4}$

3

목표| n의 값에 따라 식을 구해 보고 연속성과 미분가능성을 조사할 수 있게 한다.

풀이| (i) $n=-1$일 때 $f(x)=\frac{|x|}{x}$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이고, **미분가능하지 않다.**

(ii) $n=0$일 때 $f(x)=|x|$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이지만 **미분가능하지 않다.**

(iii) $n=1$일 때 $f(x)=x|x|$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이고 **미분가능하다.**

4

목표| 도함수의 정의를 이용하여 도함수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $f(x+y)=f(x)+f(y)$이므로

$f'(5)=\lim_{h\to0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(5)+f(h)-f(5)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=7$

$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=\mathbf{7}$

5

목표| 미분계수의 정의와 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-5}{x-2}=3$이므로 $f(2)=5$이고 $f'(2)=3$

$\lim_{x\to2}\frac{g(x)-3}{x-2}=4$이므로 $g(2)=3$이고 $g'(2)=4$

따라서 $y=f(x)g(x)$의 $x=2$에서의 미분계수는

$f'(2)g(2)+f(2)g'(2)=3\times3+5\times4=\mathbf{29}$

2 도함수의 활용

중단원을 시작하며

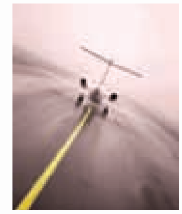
이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.
② 함수에 대한 평균값 정리를 이해하게 한다.
③ 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있게 한다.
④ 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있게 한다.
⑤ 방정식과 부등식에 활용할 수 있게 한다.
⑥ 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있게 한다.

교과서 106 쪽

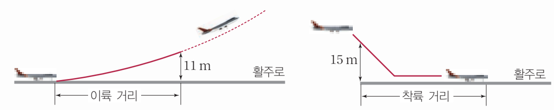
2 도함수의 활용

항공기의 이착륙을 위해서는 충분한 길이의 활주로가 필요하다.



항공기의 이륙 거리는 항공기가 활주로에 멈춰선 지점으로부터 활주를 시작해 바퀴가 지면에서 떨어져 활주로 상공 약 11 m에 이르기까지의 거리를 말한다. 또 착륙 거리는 항공기가 진입한 활주로 상공 약 15 m 지점부터 활주 후 정지 지점까지의 거리를 말한다.

항공기는 이륙하는 데 필요한 양력을 얻을 때까지 충분한 거리를 활주해야 하는데, 보통 대형기의 경우 이륙 거리는 3천여 m 정도이며, 착륙 거리는 2천여 m 정도이다.



단원 과제 이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 130 쪽

항공기가 이륙하기 위해 필요한 거리를 구할 수 있을까?

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
01 접선의 방정식	접선의 방정식
02 평균값 정리	롤의 정리
	평균값 정리
03 함수의 증가와 감소	함수의 증가와 감소
	함수의 증가, 감소와 도함수의 부호
04 함수의 극대와 극소	함수의 극대와 극소
	극대와 극소의 판정
05 함수의 그래프	다항함수의 그래프의 개형
	구간에서의 함수의 최댓값, 최솟값
06 방정식과 부등식에의 활용	함수의 그래프를 이용한 방정식의 실근의 개수
	함수의 그래프를 이용한 부등식의 증명
07 속도와 가속도	속도와 가속도
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

성취 기준과 성취 수준

성취 기준		성취 수준
1. 접선의 방정식을 구할 수 있다.	상	주어진 점에서 다항함수 $y=f(x)$의 그래프에 그은 접선의 방정식을 구할 수 있다.
	중	다항함수 $y=f(x)$의 그래프에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식을 구할 수 있다.
	하	다항함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.
2. 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다.	상	평균값 정리를 이용하여 문제를 해결하고 설명할 수 있다.
	중	주어진 구간에서 평균값 정리를 만족하는 상수의 값을 구할 수 있다.
	하	함수의 그래프를 이용하여 평균값 정리를 말할 수 있다.

들어가면서 이 단원에서는 미분법을 이용하여 곡선의 접선을 구하고 이를 바탕으로 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 알 수 있으며 곡선의 그래프를 그릴 수 있게 한다. 또, 실생활에서 최대, 최소의 문제를 해결하며 움직이는 물체의 속도와 가속도를 구할 수 있게 하는 것이 이 단원의 지도 목표이다.

교과서 107 쪽

01 접선의 방정식

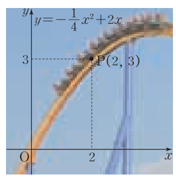
● 접선의 방정식을 구할 수 있다.

접선의 방정식은 어떻게 구하는가?

탐구 활동 다음 그림은 어느 롤러코스터의 레일의 일부를 좌표평면 위에 나타낸 것이다. 이 레일의 어떤 점을 기준으로 수평 거리가 x m 되었을 때의 높이 y m가

$$y=-\frac{1}{4}x^2+2x$$

라고 할 때, 물음에 답하여 보자.



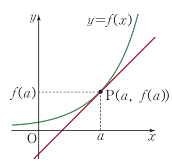
1. 점 $P(2, 3)$에서의 접선의 기울기를 구하여 보자.
2. 1을 이용하여 이 곡선 위의 점 $P(2, 3)$에서의 접선의 방정식을 구하여 보자.

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$와 같다.

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 한 점 P에서의 접선은 점 $(a, f(a))$를 지나고, 기울기가 $f'(a)$인 직선이므로 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

이다.



수학 I 직선의 방정식
점 (x_1, y_1)을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은
$y-y_1=m(x-x_1)$

이상을 정리하면 다음과 같다.

> **접선의 방정식**
> 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은
> $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

성취 기준		성취 수준
3. 함수의 증가와 감소, 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.	상	다항함수의 극값을 구하고, 그 과정을 설명할 수 있다.
	중	다항함수의 극대, 극소를 판정할 수 있다.
	하	함수의 그래프를 보고 증가하는 구간 또는 감소하는 구간을 찾을 수 있다.
4. 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.	상	다항함수의 그래프의 개형을 그리고, 그 과정을 설명할 수 있다.
	중	다항함수의 증가, 감소를 표로 나타낼 수 있다.
	하	다항함수의 증가, 감소를 나타낸 표를 보고 그래프의 개형을 그릴 수 있다.
5. 방정식과 부등식에 활용할 수 있다.	상	도함수를 활용하여 방정식과 부등식에 대한 문제를 해결할 수 있다.
	중	도함수를 활용하여 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있다.
	하	다항함수의 그래프를 보고 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있다.

성취 기준		성취 수준
6. 속도와 가속도에 대한 문제에 활용할 수 있다.	상	수직선 위의 운동에서 속도, 가속도와 관련된 실생활 문제를 해결할 수 있다.
	중	수직선 위를 움직이는 점의 위치 $x=f(t)$에서 속도, 가속도를 구할 수 있다.
	하	수직선 위를 움직이는 점의 위치 $x=f(t)$에서 속도는 $v=f'(t)$, 가속도는 $a=v'(t)$임을 말할 수 있다.

01 접선의 방정식

소단원 지도 목표

① 미분계수를 이용하여 곡선의 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

② 곡선의 접선에 대한 여러 가지 문제를 해결할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 접선의 기울기는 미분계수와 같으므로 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식은 기울기(미분계수)를 알고 한 점을 지나는 직선의 방정식을 구할 때와 같음을 이해시키도록 한다.

2. 곡선에 대한 접선의 방정식은 접점에서의 접선의 방정식, 곡선 밖의 점에서의 접선의 방정식의 두 가지 유형으로 구분할 수 있다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 롤러코스터의 레일이 그리는 포물선 위의 한 점에서의 접선의 기울기는 미분계수와 같음을 알게 하여 접선의 의미를 생각해 보게 한다. 또한 포물선을 함수로 나타내고 그 함수의 도함수를 구하여 접선의 기울기를 구할 수 있음을 알게 한다.

1. $f(x)=-\frac{1}{4}x^2+2x$라고 하면

$f'(x)=-\frac{1}{2}x+2$

따라서 $x=2$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=\mathbf{1}$이다.

2. 기울기가 1이고 점$(2, 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-3=1(x-2)$, 즉 $\boldsymbol{y=x+1}$이다.

본문 해설

❶ 한 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y-y_1=m(x-x_1)$
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$이므로 점 P에서의 접선의 방정식은 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

1

목표| 곡선 위의 주어진 점에서 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

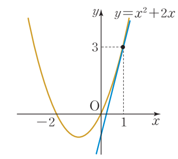
풀이| (1) $f(x)=x^2+4x-3$으로 놓으면
$f'(x)=2x+4$
점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는
$f'(1)=2\cdot1+4=6$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y-2=6(x-1)$, $\boldsymbol{y=6x-4}$

(2) $f(x)=-2x^3+4x+3$으로 놓으면
$f'(x)=-6x^2+4$
점 $(-1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는
$f'(-1)=-6\cdot(-1)^2+4=-2$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y-1=-2(x+1)$, $\boldsymbol{y=-2x-1}$

교과서 108 쪽

예제 01 곡선 $y=x^2+2x$ 위의 점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 방정식을 구하여라.

❶ 풀이 $f(x)=x^2+2x$라고 하면
$f'(x)=2x+2$
점 $(1,\ 3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=4$
따라서 구하는 접선의 방정식은 기울기가 4이고,
점 $(1,\ 3)$을 지나므로
$y-3=4(x-1)$
$y=4x-1$



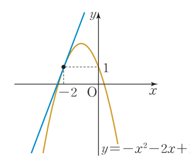
답 $y=4x-1$

문제 1 다음 곡선 위의 주어진 점에서의 접선의 방정식을 구하여라.
(1) $y=x^2+4x-3$ $(1,\ 2)$ (2) $y=-2x^3+4x+3$ $(-1,\ 1)$

예제 02 곡선 $y=-x^2-2x+1$에 접하고 기울기가 2인 접선의 방정식을 구하여라.

접점의 좌표를 $(a,\ f(a))$로 놓고 a의 값을 구한다. ❷

풀이 $f(x)=-x^2-2x+1$이라고 하면
$f'(x)=-2x-2$
접점의 좌표를 $(a,\ -a^2-2a+1)$이라고 하면
접선의 기울기가 2이므로
$f'(a)=-2a-2=2$
$a=-2$
따라서 구하는 접선의 방정식은 기울기가 2이고, 점 $(-2,\ 1)$을 지나므로
$y-1=2(x+2)$
$y=2x+5$



답 $y=2x+5$

문제 2 다음 곡선에 접하고 기울기가 -1인 접선의 방정식을 구하여라.
(1) $y=x^2-5x+2$ (2) $y=-x^3+2x+2$

문제 3 곡선 $y=x^2-4x+2$에 접하고, 직선 $2x+y+1=0$과 평행한 접선의 방정식을 구하여라.

본문 해설

❷ 일반적으로 기울기가 m인 곡선 $y=f(x)$의 접선의 방정식은 다음과 같이 구한다.
(1) 접점을 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$로 놓는다.
(2) 방정식 $f'(a)=m$에서 a를 구한다.
(3) $y-f(a)=f'(a)(x-a)$에서 접선의 방정식을 구한다.

2

목표| 접선의 기울기가 주어질 때, 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $f(x)=x^2-5x+2$로 놓으면 $f'(x)=2x-5$
접점의 x좌표를 a라고 하면 접선의 기울기가 -1이므로 $f'(a)=2a-5=-1$, $a=2$
이때, $f(2)=-4$이므로 구하는 접선의 방정식은
$y+4=-1(x-2)$, $\boldsymbol{y=-x-2}$

(2) $f(x)=-x^3+2x+2$로 놓으면 $f'(x)=-3x^2+2$
접점의 x좌표를 a라고 하면 접선의 기울기가 -1이므로
$f'(a)=-3a^2+2=-1$, $a=1$ 또는 $a=-1$
이때, $f(1)=3$, $f(-1)=1$이므로 구하는 접선의 방정식은
$y-3=-1(x-1)$, 또는 $y-1=-1(x+1)$
따라서 $\boldsymbol{y=-x+4}$ **또는** $\boldsymbol{y=-x}$

3

목표| 접선의 기울기가 주어질 때, 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| $f(x)=x^2-4x+2$로 놓으면 $f'(x)=2x-4$
접점의 좌표를 $(a,\ a^2-4a+2)$라고 하면 $f'(a)=2a-4$
이때, 접선의 방정식은 $2x+y+1=0$, 즉 $y=-2x-1$의 기울기와 같으므로 $2a-4=-2$, $a=1$
따라서 접점의 좌표는 $(1,\ -1)$이고 기울기가 -2인 접선의 방정식은 $y+1=-2(x-1)$, $\boldsymbol{y=-2x+1}$

예제 03 점 $\mathrm{P}(1,\ -5)$에서 곡선 $y=x^2-2x$에 그은 접선의 방정식을 구하여라.

③ **풀이** $f(x)=x^2-2x$라고 하면

$f'(x)=2x-2$

접점의 좌표를 $(a,\ a^2-2a)$라고 하면 접선의 기울기는

$f'(a)=2a-2$이므로 접선의 방정식은

$y-(a^2-2a)=(2a-2)(x-a)$ ……①

이 접선이 점 $\mathrm{P}(1,\ -5)$를 지나므로

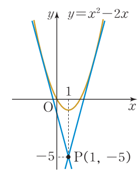
$-5-(a^2-2a)=(2a-2)(1-a)$

$a^2-2a-3=0$

$a=-1$ 또는 $a=3$

따라서 구하는 접선의 방정식은 ①에서

$y=-4x-1$ 또는 $y=4x-9$

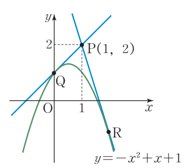


답 $y=-4x-1$ 또는 $y=4x-9$

문제 4 다음 주어진 점 P에서 곡선에 그은 접선의 방정식을 구하여라.

(1) $y=x^2-3x+4$ $\mathrm{P}(1,\ 1)$ (2) $y=x^3+2x$ $\mathrm{P}(0,\ 2)$

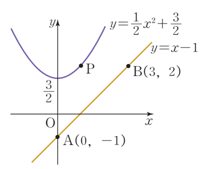
문제 5 점 $\mathrm{P}(1,\ 2)$에서 곡선 $y=-x^2+x+1$에 그은 두 접선의 접점을 각각 Q, R라고 할 때, 선분 QR의 길이를 구하여라.



사고력 기르기

추론
의사소통
▶문제 해결

오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}$ 위의 점 P와 직선 $y=x-1$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(0,\ -1)$, $\mathrm{B}(3,\ 2)$에 대하여 점 P와 직선 $y=x-1$ 사이의 최단 거리를 구하고, 이때의 점 P에서 삼각형 PAB의 넓이를 구하여 보자.



본문 해설

③ 곡선 $y=f(x)$ 위에 있지 않은 점 $(\alpha,\ \beta)$에서 이 곡선에 그은 접선의 방정식은 다음과 같이 구한다.

(1) 접점을 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$로 놓는다.

(2) $f'(a)$를 구한다.

(3) $y-f(a)=f'(a)(x-a)$에 $x=\alpha$, $y=\beta$를 대입하여 a를 구한다.

4

목표| 곡선 밖의 점에서 곡선에 그은 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 접점의 좌표를 $(a,\ a^2-3a+4)$라고 하자.

$f(x)=x^2-3x+4$로 놓으면 $f'(x)=2x-3$이므로

$f'(a)=2a-3$

따라서 $y-(a^2-3a+4)=(2a-3)(x-a)$

즉, $y=(2a-3)x-a^2+4$ …… ㉠

이때, 접선 ㉠이 점 $\mathrm{P}(1,\ 1)$을 지나므로

$1=(2a-3)-a^2+4$, $a=0$ 또는 $a=2$

㉠에 $a=0$ 또는 $a=2$를 대입하면, 구하는 접선의 방정식은

$\boldsymbol{y=-3x+4}$ **또는** $\boldsymbol{y=x}$

(2) 접점의 좌표를 $(a,\ a^3+2a)$라고 하자.

$f(x)=x^3+2x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+2$이므로 $f'(a)=3a^2+2$

따라서 $y-(a^3+2a)=(3a^2+2)(x-a)$

즉, $y=(3a^2+2)x-2a^3$ …… ㉠

이때, 접선 ㉠이 점 $\mathrm{P}(0,\ 2)$를 지나므로

$2=(3a^2+2)\cdot 0-2a^3$, $a=-1$

㉠에 $a=-1$을 대입하면, 구하는 접선의 방정식은 $\boldsymbol{y=5x+2}$

5

목표| 곡선 밖의 점에서 곡선에 그은 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| $f(x)=-x^2+x+1$로 놓으면

$f'(x)=-2x+1$

접점의 좌표를 $(a,\ -a^2+a+1)$이라고 하면

접선의 기울기는 $-2a+1$이므로

$y-(-a^2+a+1)=(-2a+1)(x-a)$

이 접선이 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$2-(-a^2+a+1)=(-2a+1)(1-a)$

$a^2-2a=0$, $a=0$ 또는 $a=2$

따라서 $\mathrm{Q}(0,\ 1)$, $\mathrm{R}(2,\ -1)$이므로

$\overline{\mathrm{QR}}=\sqrt{(2-0)^2+(-1-1)^2}=\boldsymbol{2\sqrt{2}}$

사고력 기르기 문제 해결

출제 의도| 기울기가 주어졌을 때의 접선의 방정식을 구하고 이를 활용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 직선 AB의 기울기는 1이므로 점 P에서의 접선의 기울기가 1일 때, 점 P와 직선 $y=x-1$ 사이의 거리가 최단 거리이다. $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}$이라고 하면 $f'(x)=x$

점 P의 좌표를 $\left(a,\ \frac{1}{2}a^2+\frac{3}{2}\right)$이라고 하면 $f'(a)=a=1$

점 P의 좌표는 $(1,\ 2)$이고 점 P와 직선 $x-y-1=0$ 사이의 거리 d는 $d=\frac{|1-2-1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

$\triangle\mathrm{PAB}=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times d=\frac{1}{2}\times\sqrt{9+9}\times\sqrt{2}=\boldsymbol{3}$

02 평균값 정리

소단원 지도 목표

① 롤의 정리를 알고 이를 문제 해결에 활용할 수 있게 한다.
② 평균값 정리를 알고 이를 문제 해결에 활용할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

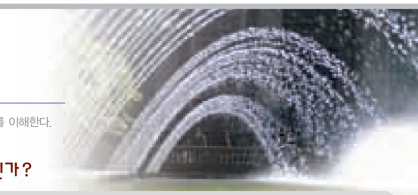
1. 롤의 정리는 그래프를 통하여 그 의미를 충분히 이해시키고, 문제 해결에 활용할 수 있도록 지도한다.

2. 평균값 정리는 그래프를 통하여 그 의미를 충분히 이해시키고, 문제 해결에 활용할 수 있도록 지도한다.

3. 롤의 정리가 성립하기 위한 조건과 평균값 정리가 성립하기 위한 조건을 분명히 알고 적용할 수 있게 지도한다.

교과서 110 쪽

02 평균값 정리



● 함수에 대한 평균값 정리를 이해한다.

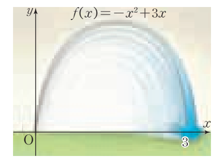
롤의 정리란 무엇인가?

탐구 활동

어느 광장에 오른쪽 그림과 같은 분수대가 설치되어 있다. 이 분수대에서 물을 쏘아 올린 지점을 원점으로 하고, 원점에서 수평으로 x m 떨어진 지점의 물의 높이 $f(x)$ m가

$$f(x)=-x^2+3x$$

라고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.

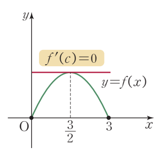


1. $f(a)=f(b)=0$을 만족시키는 실수 a, b의 값을 구하여 보자. (단, $a<b$)

2. $f'(c)=0$을 만족시키는 실수 c의 값이 a와 b 사이에 있는지 확인하여 보자.

함수 $f(x)=-x^2+3x$는 닫힌 구간 $[0, 3]$에서 연속이고 열린 구간 $(0, 3)$에서 미분가능하다.

이때 오른쪽 그림과 같이 $f(0)=f(3)$이고 $f'\left(\frac{3}{2}\right)=0$이므로 $f'(c)=0$인 $c=\frac{3}{2}$이 열린 구간 $(0, 3)$에 존재한다.



일반적으로 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린 구간 (a, b)에서 미분가능할 때, $f(a)=f(b)$이면 곡선 $y=f(x)$의 접선이 x축과 평행하게 되는, 즉 $f'(c)=0$인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

이 성질에서 다음의 정리가 성립하며, 이것을 **롤의 정리**라고 한다.

❶ **롤의 정리**

함수 $y=f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린 구간 (a, b)에서 미분가능할 때, $f(a)=f(b)$이면

$$f'(c)=0$$

인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

새로 나온 용어와 기호

- 롤의 정리(Rolle's theorem)
- 평균값 정리(mean value theorem)

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 분수대에서 뿜어져 나오는 물은 포물선을 그리며 움직이므로 이차함수의 성질을 이용하여 물의 높이를 계산할 수 있다. 그래프를 이용해서 물의 높이가 가장 높은 지점에서 접선의 기울기가 0이 됨을 직관적으로 알게 함으로써 롤의 정리의 의미를 이해하게 한다.

1. $f(x)=-x^2+3x$에서

$-x^2+3x=0$, $x(x-3)=0$

$x=0$ 또는 $x=3$

따라서 $\boldsymbol{a=0,\ b=3}$

2. $f'(x)=-2x+3$이고 $f'(c)=0$이므로

$-2c+3=0$, $c=\frac{3}{2}$

따라서 열린 구간 $(0, 3)$에서 $f'(c)=0$이 되는 $c=\frac{3}{2}$이 존재한다.

본문 해설

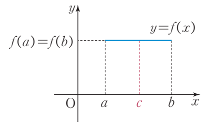
❶ 함수 $f(x)$에 롤의 정리를 적용하기 위해서는 $f(x)$가 롤의 정리의 가정을 만족시켜야 함을 알게 한다. 즉 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린 구간 (a, b)에서 미분가능하다는 조건 중에 한 가지라도 만족시키지 않으면 롤의 정리를 적용할 수 없음을 알게 한다.

이제 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이면 $f(x)$가 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 가짐을 이용하여 롤의 정리를 증명하여 보자.

(i) 함수 $f(x)$가 상수함수인 경우

열린 구간 (a, b)에 속하는 모든 c에 대하여

$f'(c)=0$이다.



(ii) 함수 $f(x)$가 상수함수가 아닌 경우

$f(a)=f(b)$이므로 열린 구간 (a, b)에 속하는 $x=c$에서 최댓값 또는 최솟값을 가진다.

P. 74 최대 · 최소 정리
함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이면 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

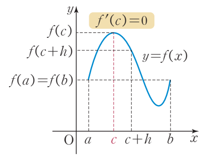
① $x=c$에서 최댓값 $f(c)$를 가질 때

절댓값이 충분히 작은 수 $h(h\neq0)$에 대하여

$f(c+h)-f(c)\leq0$이므로

$$\lim_{h\to0+}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\leq0,$$

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\geq0$$



이다. 그런데 $f(x)$는 $x=c$에서 미분가능하므로 좌극한과 우극한이 같다. 따라서 다음이 성립한다.

$$f'(c)=\lim_{h\to0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=0$$

❶ ② $x=c$에서 최솟값 $f(c)$를 가질 때

최솟값을 가질 때에도 ①과 같은 방법으로 $f'(c)=0$임을 보일 수 있다.

예제 01

함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x$에 대하여 닫힌 구간 $[0, 6]$에서 롤의 정리를 만족시키는 c의 값을 구하여라.

풀이 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x$는 닫힌 구간 $[0, 6]$에서 연속이고 열린 구간 $(0, 6)$에서 미분가능하다. 또한 $f(0)=f(6)$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$을 만족시키는 c가 열린 구간 $(0, 6)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=x-3$에서 $f'(c)=c-3=0$, $c=3$

답 3

문제 1 다음 함수에 대하여 주어진 구간에서 롤의 정리를 만족시키는 c의 값을 구하여라.

(1) $f(x)=-x^2+4x$ $[1, 3]$　　(2) $f(x)=(x-a)(x-b)$ $[a, b]$

1

목표| 롤의 정리를 이용할 수 있게 한다.

풀이| (1) 함수 $f(x)=-x^2+4x$는 닫힌 구간 $[1, 3]$에서 연속이고 열린 구간 $(1, 3)$에서 미분가능하다.

$f(1)=f(3)=3$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$을 만족시키는 c가 열린 구간 $(1, 3)$에 존재한다.

$f'(x)=-2x+4$에 대하여

$f'(c)=-2c+4=0$이므로 $\boldsymbol{c=2}$이다.

(2) 함수 $f(x)=(x-a)(x-b)$는 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린 구간 (a, b)에서 미분가능하다.

$f(a)=f(b)=0$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$을 만족시키는 c가 열린 구간 (a, b)에 존재한다.

$f'(x)=2x-a-b$에 대하여

$f'(c)=2c-(a+b)=0$이므로 $\boldsymbol{c=\frac{a+b}{2}}$

이다.

본문 해설

❶ 함수 $f(x)$가 $x=c$에서 최솟값을 가질 때,

$f(c+h)-f(c)\geq0$이므로

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\geq0,\ \lim_{h\to-0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\leq0$$

한편 $y=f(x)$는 $x=c$에서 미분가능하므로 좌극한과 우극한이 같다.

따라서 $f'(c)=\lim_{h\to0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=0$

예를 들어 함수 $f(x)=\sin x$는 구간 $[0, \pi]$에서 연속이고 구간 $(0, \pi)$에서 미분가능하며 $f(0)=f(\pi)$이므로 구간 $(0, \pi)$에 속하는 적당한 c에 대하여 $f'(c)=\cos c=0$이 되어야 한다.

실제로 $c=\frac{\pi}{2}$에 대하여 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$이다.

지/도/자/료

1. 롤의 정리를 증명할 때, 연속함수의 성질 중의 하나인 최대 · 최소 정리를 이용하도록 한다.

2. 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이면 $f(x)$는 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 가진다.

① 함수 $f(x)$가 상수함수인 경우에 롤의 정리를 만족시키는 c의 값이 존재함을 직관적으로 알 수 있다.

② 함수 $f(x)$에 롤의 정리를 적용할 때 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린 구간 (a, b)에서 미분가능한지를 반드시 확인하도록 지도한다.

본문 해설

❶ 평균값 정리의 기하학적 의미는 $y=f(x)$의 그래프에서 두 점 A, B를 잇는 직선 AB에 평행한 접선을 구간 $(a,\ b)$ 안에서 적어도 하나 그을 수 있다는 것이다.

❷ 평균값 정리는

$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

에서 c는 a와 b 사이의 수이므로 $b=a+h$라고 하면

$f(a+h)=f(a)+f'(c)h$

또 $\dfrac{c-a}{h}=\theta\ (0<\theta<1)$라고 놓으면

$f(a+h)=f(a)+f'(a+\theta h)h$

와 같이 나타낼 수 있다.

❸ 롤의 정리를 이용하여 평균값 정리를 증명한다. 함수 $h(x)$가 롤의 정리를 적용하기 위한 조건을 만족시키고 있음을 확인한다.

교과서 112 쪽

평균값 정리란 무엇인가?

함수 $f(x)=x^2$은 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고, 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 미분가능하다.

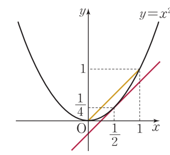
❶ 한편 x의 값이 0에서 1까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균 변화율은

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=1$$

이다. 이때 $f'(x)=2x$에 대하여 방정식 $2x=1$의 근인 $\frac{1}{2}$은 0과 1 사이에 있다. 따라서

$$f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=1$$

이 성립한다.



이와 같이 롤의 정리에서 $f(a)\neq f(b)$인 경우까지 확장하면 다음 정리가 성립하며, 이것을 **평균값 정리**라고 한다.

❷ **평균값 정리**

함수 $y=f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린 구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

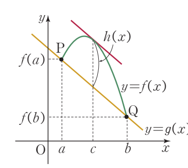
인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

❸ 이제 평균값 정리를 증명하여 보자.

두 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$, $\mathrm{Q}(b,\ f(b))$를 지나는 직선의 방정식을 $y=g(x)$라고 하면 기울기가 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$이고, 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$를 지나므로

$$g(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

이다. 이때 $h(x)=f(x)-g(x)$라고 하면 함수 $h(x)$는 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린 구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하며 $h(a)=h(b)=0$이다.



지/도/자/료

1. 평균값 정리를 증명하면서 평균값 정리의 의미를 함수의 그래프를 통해 이해하도록 하고 정리의 활용에 중점을 두어 지도한다.

2. 함수 $f(x)$에 평균값 정리를 적용할 때 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린 구간 $(a,\ b)$에서 미분가능한지를 반드시 확인하도록 지도한다.

읽/기/자/료 평균값 정리

평균값 정리는 영어로 Mean Value Theorem으로 간단히 MVT라고도 한다.

평균값 정리는 교과서에서

「함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린 구간 $(a,\ b)$에서 미분가능하면 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.」로 정리된다.

바꿔 말하면 a와 b 사이의 평균변화율과 순간변화율이 같아지는 점 c가 존재함을 주장하는 것이다.

또, 기하학적으로는 점 P와 점 Q를 지나는 매끄러운 곡선에 대해 두 점 P, Q를 이은 직선 PQ와 평행한 접선을 두 점 P, Q 사이에 적어도 1개는 그을 수 있다는 것을 의미한다.

교과서 113 쪽

따라서 롤의 정리에 의하여

$$h'(c)=f'(c)-g'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다. 즉,

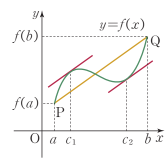
$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

인 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

평균값 정리의 의미를 그래프를 통하여 알아보자.

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$는 함수 $f(x)$의 구간 $[a, b]$에서의 평균변화율이다.

평균값 정리에서 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$, $\mathrm{Q}(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기이고, $f'(c)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(c, f(c))$에서의 접선의 기울기이다.



따라서 평균값 정리는 열린 구간 (a, b)에서 곡선 $y=f(x)$에 접하고 직선 PQ와 평행한 직선이 적어도 하나 존재한다는 것을 뜻한다.

예제 02 함수 $f(x)=x^2+2x+2$에 대하여 닫힌 구간 $[-1, 2]$에서 평균값 정리를 만족시키는 c의 값을 구하여라.

$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=f'(c)$인 c를 구한다.

풀이 함수 $f(x)=x^2+2x+2$는 닫힌 구간 $[-1, 2]$에서 연속이고 열린 구간 $(-1, 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=f'(c)$ $(-1<c<2)$인 c가 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=2x+2$이므로 평균값 정리를 만족시키는 c를 구하면

$\frac{10-1}{2-(-1)}=2c+2$, $c=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

문제 2 다음 함수에 대하여 주어진 구간에서 평균값 정리를 만족시키는 c의 값을 구하여라.

(1) $f(x)=x^3$ $[0, 3]$ (2) $f(x)=-x^3+x$ $[0, 2]$

2

목표 평균값 정리를 이용할 수 있게 한다.

풀이 (1) 함수 $f(x)=x^3$은 닫힌 구간 $[0, 3]$에서 연속이고 열린 구간 $(0, 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=f'(c)\ (0<c<3)$$

인 c가 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=3x^2$이므로 평균값 정리를 만족시키는 c를 구하면

$$\frac{27-0}{3-0}=3c^2,\ 3c^2=9$$

$0<c<3$에서 $\boldsymbol{c=\sqrt{3}}$

(2) 함수 $f(x)=-x^3+x$는 닫힌 구간 $[0, 2]$에서 연속이고 열린 구간 $(0, 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=f'(c)\ (0<c<2)$$

인 c가 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=-3x^2+1$이므로 평균값 정리를 만족시키는 c를 구하면

$$\frac{-6-0}{2-0}=-3c^2+1,\ c^2=\frac{4}{3}$$

$0<c<2$에서 $\boldsymbol{c=\frac{2\sqrt{3}}{3}}$

지/도/자/료

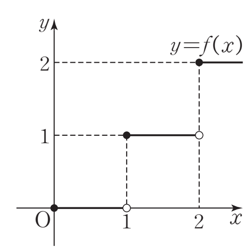
평균값 정리에서 '구간 $[a, b]$에서 연속이고 구간 (a, b)에서 미분가능'이란 조건 중 어느 하나가 빠지면 다음과 같이 정리의 결론이 성립하지 않는 경우가 생긴다.

1. 연속일 조건이 빠진 경우

함수 $f(x)=[x]$는 구간 $(1, 2)$에서 미분가능하고, $f(1)=1$, $f(2)=2$이므로

$$\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{2-1}{2-1}=1$$

이지만 $1<x<2$인 모든 x에 대하여 $f'(x)=0$이므로



$$\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=f'(c)=1$$

인 c가 1과 2 사이에 존재하지 않는다.

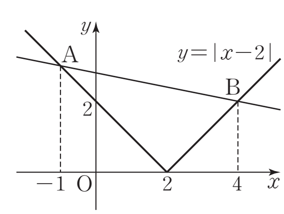
2. 미분가능할 조건이 빠진 경우

함수 $f(x)=|x-2|$는 구간 $[-1, 4]$에서 연속이지만 $-1<c<4$인 c에 대하여

$$f'(c)=\frac{f(4)-f(-1)}{4-(-1)}=-\frac{1}{5}$$

인 c는 존재하지 않는다.

오른쪽 그림에서 직선 AB와 평행한 접선을 구간 $(-1, 4)$의 어느 점에서도 그을 수 없음은 명백하다.



교과서 114 쪽

상수함수 $f(x)=c$에 대하여 $f'(x)=0$이 성립함을 알고 있다. 이때 평균값 정리를 이용하면 이 명제의 역도 성립함을 알 수 있다.

예제 03 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린 구간 (a, b)에서 미분가능할 때, 열린 구간 (a, b)의 모든 x에 대하여 $f'(x)=0$이면 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[a, b]$에서 상수함수임을 증명하여라.

증명 $a<x\le b$인 임의의 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[a, x]$에서 연속이고 열린 구간 (a, x)에서 미분가능하다.
따라서 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c)$$

인 c가 열린 구간 (a, x)에 적어도 하나 존재한다.
그런데 열린 구간 (a, b)의 모든 x에 대하여 $f'(x)=0$이므로

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c)=0$$
$$f(x)-f(a)=0$$
$$f(x)=f(a)$$

따라서 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[a, b]$에서 상수함수이다.

발전

문제 3 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린 구간 (a, b)에서 미분가능할 때, 닫힌 구간 $[a, b]$에 속하는 모든 x에 대하여

$$f'(x)=g'(x)\text{이면 } f(x)=g(x)+k \ (k\text{는 상수})$$

임을 증명하여라.

사고력 기르기

▶추론
의사소통
문제 해결

다음 물음에 답하여 보자.

(1) 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 5$이고, $f(0)=-3$일 때, $f(2)$의 값이 될 수 있는 가장 큰 값을 말하여 보자.

(2) $f(0)=-1$, $f(2)=4$이고, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 2$를 만족시키는 함수 $f(x)$가 존재하는지 말하여 보자.

3

목표 | 평균값 정리를 이용할 수 있게 한다.

풀이 | $h(x)=f(x)-g(x)$라고 하면 함수 $h(x)$는 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린 구간 (a, b)에서 미분가능하다.
열린 구간 (a, b)의 모든 x에 대하여
$h'(x)=f'(x)-g'(x)=0$
이므로 $h(x)$는 닫힌 구간 $[a, b]$에서 상수함수이다.
따라서 $h(x)=k$ (k는 상수)라고 하면
$h(x)=f(x)-g(x)=k$,
$f(x)=g(x)+k$

사고력 기르기 추론

출제 의도 | 평균값 정리를 이용하여 조건을 만족시키는 함숫값이 존재하는지 알아볼 수 있도록 지도한다.

풀이 | (1) 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[0, 2]$에서 연속이고 열린 구간 $(0, 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=f'(c)$$

인 c가 열린 구간 $(0, 2)$에 적어도 하나 존재한다.
모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 5$이므로

$$\begin{aligned} f(2)&=f(0)+2f'(c)\\ &=-3+2f'(c)\\ &\le -3+2\times 5=\mathbf{7} \end{aligned}$$

(2) 함수 $f(x)$가 주어진 조건을 만족시키는 함수라고 하면 $f(x)$는 닫힌 구간 $[0, 2]$에서 연속이고 $(0, 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=f'(c)$$

인 c가 열린 구간 $(0, 2)$에 적어도 하나 존재한다. 즉, $f'(c)=\frac{5}{2}$인 c가 존재한다.
이것은 $f'(x)\le 2$에 모순이다.
따라서 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$가 **존재하지 않는다.**

지/도/자/료

롤의 정리와 평균값 정리를 비교하여 학습할 수 있도록 지도하면 학생들의 이해의 폭을 높일 수 있다.
함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린 구간 (a, b)에서 미분가능할 때
롤의 정리는 $f(a)=f(b)$라는 특별한 조건을 주어 정리한 것이고, 평균값 정리는 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$의 평균변화율과 순간변화율이 같아지는 점 c가 존재함을 정리한 것으로 비교하여 이해할 수 있게 한다.

교과서 115 쪽

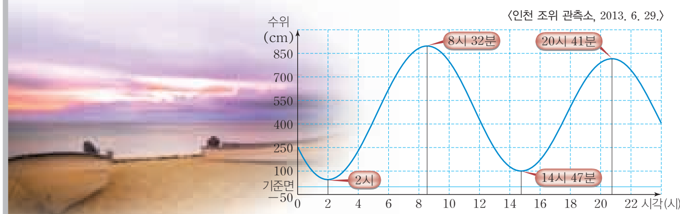
03 함수의 증가와 감소

● 함수의 증가와 감소를 판정하고 설명할 수 있다.

함수의 증가와 감소는 어떻게 알 수 있는가?

탐구 활동 다음은 2013년 어느 날 인천 조위 관측소에서 측정한 해수면의 높이를 나타낸 그래프이다. 물음에 답하여 보자.

〈인천 조위 관측소, 2013. 6. 29.〉



1. 해수면의 높이가 증가하는 시간대를 말하여 보자.

2. 해수면의 높이가 감소하는 시간대를 말하여 보자.

위의 그래프에서 곡선이 오른쪽 위로 올라가면 해수면의 높이가 증가하고, 오른쪽 아래로 내려가면 해수면의 높이가 감소함을 알 수 있다.

먼저 함수의 그래프에서 증가와 감소에 대하여 알아보자.

❶ 함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 임의의 두 수 x_1, x_2에 대하여

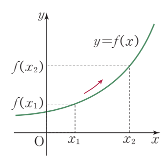
$$x_1<x_2\text{일 때, }\ f(x_1)<f(x_2)$$

가 성립하면 $f(x)$는 이 구간에서 **증가**한다고 한다. 또한

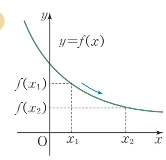
$$x_1<x_2\text{일 때, }\ f(x_1)>f(x_2)$$

가 성립하면 $f(x)$는 이 구간에서 **감소**한다고 한다.

증가



감소



새로 나온 용어와 기호

• 증가(增加, increasing)
• 감소(減少, decreasing)

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 해수면의 높이는 일정한 시간을 주기로 높아지고 낮아짐을 반복한다. 이를 이용하여 함수의 증가와 감소의 의미를 생각해 보게 한다. 해수면의 높이를 함수로 나타내고, 그 함수의 접선의 기울기를 통해 일정한 관계가 있음을 직관적으로 알게 한다.

1. 해수면의 높이가 증가하는 시간대는
2시~8시 32분,
14시 47분~20시 41분이다.

2. 해수면의 높이가 감소하는 시간대는
0시~2시, 8시 32분~14시 47분,
20시 41분~24시이다.

03 함수의 증가와 감소

소단원 지도 목표

① 구간에서 함수의 증가와 감소의 뜻을 이해하게 한다.
② 도함수의 부호를 조사하여 함수의 증가 및 감소를 판단할 수 있게 한다.

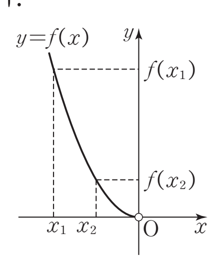
교수 · 학습상의 유의점

1. 함수의 증가와 감소는 그래프를 통해 직관적으로 이해하게 한 다음 일반적인 정의를 익히게 한다.
2. 어떤 구간에서 함수가 증가하면 접선의 기울기는 항상 양이 되고, 함수가 감소하면 접선의 기울기는 항상 음이 된다는 것을 학생들 스스로 유추하게 한 다음 미분계수의 부호와 함수의 증가, 감소 사이의 관계를 지도한다.
3. 함수의 증가와 감소를 나타내는 표를 그릴 수 있도록 지도한다.

본문 해설

❶ x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하면 함수 $f(x)$는 증가한다고 하며, x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하면 함수 $f(x)$는 감소한다고 한다.

예를 들어 함수 $f(x)=x^2$에서 구간 $(-\infty,\ 0)$의 임의의 두 수 x_1, x_2가 $x_1<x_2$이면



$f(x_1)-f(x_2)$
$=x_1^2-x_2^2$
$=(x_1+x_2)(x_1-x_2)>0$

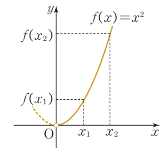
이므로 $f(x_1)>f(x_2)$이다.

따라서 함수 $f(x)=x^2$은 구간 $(-\infty,\ 0)$에서 감소한다.

교과서 116 쪽

예제 01 함수 $f(x)=x^2$은 구간 $(0, \infty)$에서 증가함을 설명하여라.

풀이 구간 $(0, \infty)$에 속하는 임의의 두 수 x_1, x_2에 대하여
$x_1<x_2$일 때
$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2-x_2^2=(x_1+x_2)(x_1-x_2)<0$
이므로 $f(x_1)<f(x_2)$이다.
따라서 함수 $f(x)=x^2$은 구간 $(0, \infty)$에서 증가한다.



문제 1 함수 $f(x)=-x^3$은 구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소함을 설명하여라.

1 이제 어떤 구간에서 함수의 증가, 감소와 도함수의 부호 사이의 관계에 대하여 알아보자.

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린 구간 (a, b)에서 미분가능하면 평균값 정리에 의하여 열린 구간 (a, b)에 속하고 $x_1<x_2$인 두 수 x_1, x_2에 대하여

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)$$

인 c가 열린 구간 (x_1, x_2)에 존재한다.

$f'(x)$의 부호에 따라 다음과 같이 두 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

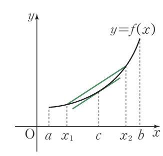
[1] 열린 구간 (a, b)의 임의의 x에서 $f'(x)>0$이면

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)>0$$

이므로 $f(x_2)-f(x_1)$의 부호와 x_2-x_1의 부호는 일치한다. 즉,

$$f(x_2)-f(x_1)>0$$

이다. 따라서 함수 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.



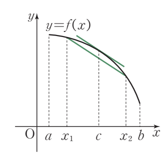
[2] 열린 구간 (a, b)의 임의의 x에서 $f'(x)<0$이면

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)<0$$

이므로 $f(x_2)-f(x_1)$의 부호와 x_2-x_1의 부호는 서로 반대이다. 즉,

$$f(x_2)-f(x_1)<0$$

이다. 따라서 함수 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.



1

목표 주어진 구간에서 함수의 증가, 감소를 판단할 수 있게 한다.

풀이 $x_1<x_2$인 임의의 두 수 x_1, x_2에 대하여

$$f(x_1)-f(x_2)=-x_1^3+x_2^3$$
$$=(x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_1^2)$$
$$x_2^2+x_1x_2+x_1^2=\left(x_2+\frac{x_1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x_1^2>0$$

이므로 $f(x_1)>f(x_2)$

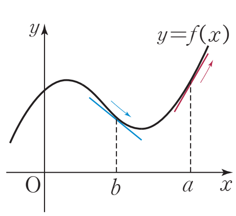
따라서 $f(x)=-x^3$은 구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소한다.

지/도/자/료 한 점에서 함수의 증가와 감소

어떤 구간에서 함수 $f(x)$가 증가하거나 감소하고 있음을 보이려면 정의를 이용하면 된다. 그러나 일반적인 함수에 대해 정의를 이용하기는 매우 어려운 일이다. 그래서 각 점에서 증가상태와 감소상태를 정의하고 이를 이용하여 구간에서 증가, 감소를 구하기도 한다. 이때 도함수를 이용하면 각 점에서 증가상태와 감소상태를 알 수 있다.

1. 함수 $f(x)$에서 충분히 작은 양수 h에 대하여
$f(a-h)<f(a)<f(a+h)$
일 때, $f(x)$는 $x=a$에서 증가상태에 있다고 한다. 또
$f(a-h)>f(a)>f(a+h)$
일 때, $f(x)$는 $x=a$에서 감소상태에 있다고 한다.

2. 다음 그림의 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기가 양수이므로 $f'(a)>0$이다.
또 점 $(b, f(b))$에서는 접선의 기울기가 음수이므로 $f'(b)<0$이다.



이때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서는 증가상태이고, $x=b$에서는 감소상태이다.

따라서 그래프에서 $f'(a)>0$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 증가상태이고, $f'(b)<0$이면 $f(x)$는 $x=b$에서 감소상태임을 확인할 수 있다.

3. 함수 $f(x)$의 도함수를 이용하여 $f(x)$의 증가상태 및 감소상태를 정리하면 다음과 같다.

(1) $f'(a)>0$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 증가상태
$f'(a)<0$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 감소상태

(2) 어떤 구간의 모든 x에 대하여
$f'(x)>0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 증가
$f'(x)<0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 감소

(3) 정의역의 모든 x에 대하여
$f'(x)>0$이면 $f(x)$는 증가함수
$f'(x)<0$이면 $f(x)$는 감소함수

교과서 117 쪽

이상을 정리하면 다음과 같다.

함수의 증가와 감소

함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고, 이 구간의 모든 x에 대하여

(1) $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

(2) $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

1 미분가능한 함수 $f(x)$가 증가하면 $f'(x)\geq 0$, 감소하면 $f'(x)\leq 0$

참고 위의 성질의 역은 일반적으로 성립하지 않는다.

예를 들어 함수 $f(x)=x^3$은 구간 $(-\infty, \infty)$에서 $x_1<x_2$인 임의의 두 수 x_1, x_2에 대하여

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)<0$$

이므로 증가하지만 $f'(0)=0$이다.

예제 02 다음 함수의 증가와 감소를 조사하여라.

(1) $f(x)=x^3-3x+1$ (2) $f(x)=x^3-3x^2+3x$

표에서 ↗는 함수 $f(x)$의 증가를, ↘는 감소를 나타낸다.

풀이 (1) $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$에서 $f'(x)>0$이므로 증가하고, 구간 $(-1, 1)$에서 $f'(x)<0$이므로 감소한다.

(2) $f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2=0$에서 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↗

함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 1)$, $(1, \infty)$에서 $f'(x)>0$이므로 증가한다.
따라서 $x=1$의 좌우에서 증가하므로 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가한다.

답 (1) 구간 $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$에서 증가, 구간 $(-1, 1)$에서 감소
(2) 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가

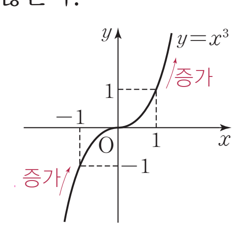
문제 2 다음 함수의 증가와 감소를 조사하여라.

(1) $f(x)=x^2-6x$ (2) $f(x)=-x^3-3x^2+9x$

(3) $f(x)=x^3+6x^2+12x$ (4) $f(x)=x^3-x^2+x+2$

본문 해설

1 어떤 구간에서 $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 증가한다. 하지만 $f(x)$가 증가하면 그 구간에서 $f'(x)\geq 0$이다.
또한 어떤 구간에서 $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 그 구간에서 감소한다. 하지만 $f(x)$가 감소하면 그 구간에서 $f'(x)\leq 0$이다.
다항함수 $f(x)$가 어떤 구간 $[\alpha, \beta]$에 속하는 모든 x에 대하여 $f'(x)>0$이면 구간 $[\alpha, \beta]$에서 $f(x)$는 증가하고, $f'(x)<0$이면 구간 $[\alpha, \beta]$에서 $f(x)$는 감소한다. 그러나 그 역은 성립하지 않는다.
예를 들어 함수 $f(x)=x^3$을 생각하여 보자.
함수 $f(x)$는 구간 $[-1, 1]$에서 증가하지만 $f'(x)=3x^2\geq 0$임을 알 수 있다.



2

목표 함수의 증가, 감소를 알게 한다.

풀이 (1) $f'(x)=2x-6=2(x-3)$이므로
$f'(x)=0$에서 $x=3$
$f(x)$의 증가와 감소를 표로 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-9	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 3)$에서 감소하고, 구간 $(3, \infty)$에서 증가한다.

(2) $f'(x)=-3x^2-6x+9$
$=-3(x+3)(x-1)$
이므로 $f'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$
$f(x)$의 증가와 감소를 표로 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-27	↗	5	↘

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -3)$, $(1, \infty)$에서 감소하고, 구간 $(-3, 1)$에서 증가한다.

(3) $f'(x)=3x^2+12x+12=3(x+2)^2$이므로
$f'(x)=0$에서 $x=-2$
$f(x)$의 증가와 감소를 표로 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	-8	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가한다.

(4) $f'(x)=3x^2-2x+1=3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$에서 $f'(x)>0$
따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가한다.

지/도/자/료

함수의 증가, 감소를 나타낼 때는 구간을 반드시 나타내도록 지도한다. 이때 증가와 감소를 나타내는 표를 사용하면 편리하다.

04 함수의 극대와 극소

소단원 지도 목표

함수의 증가와 감소를 나타내는 표를 이용하여 함수의 극대와 극소를 판정할 수 있고, 극값을 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 함수의 극대와 극소의 정의는 그래프를 이용하여 직관적으로 이해하도록 지도한다.
2. 미분가능하지 않은 점에서도 극대, 극소를 가질 수 있으며 $f'(x)=0$인 점이라고 하여 반드시 극값인 것이 아님을 강조하여 지도한다.

새로 나온 용어와 기호

• 극대(極大, local maximum)
• 극소(極小, local minimum)
• 극값(extreme values)
• 극댓값(local maximum)
• 극솟값(local minimum)

생각 열기 참/고/자/료

한 사이트에 인터넷 접속자 수가 증가하면 데이터 전송량이 증가하여 속도가 느려진다. 이와 반대로 인터넷 접속자 수가 감소하면 데이터 전송량이 감소하여 속도가 빨라진다. 시간에 따른 전송량을 그래프로 나타내면 증가, 감소가 반복적으로 나타남을 알 수 있다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 어떤 회사에서 사용하는 인터넷 회선의 데이터 전송량을 그래프로 나타냈을 때 그래프를 통해 직관적으로 극대, 극소의 의미를 이해하게 하기 위한 것이다.

1. 14시

2. 6시

교과서 118 쪽

04 함수의 극대와 극소

● 함수의 극대와 극소를 판정하고 설명할 수 있다.

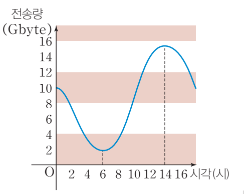
함수의 극대와 극소란 무엇인가?

생각 열기

탐구 활동

오른쪽 그림은 어떤 회사에서 사용하는 인터넷 회선의 데이터 전송량을 조사하여 나타낸 것이다. 다음 물음에 답하여 보자.

1. 바로 전과 후의 데이터 전송량보다 더 많은 전송량을 나타내는 시각을 말하여 보자.
2. 바로 전과 후의 데이터 전송량보다 더 적은 전송량을 나타내는 시각을 말하여 보자.



1

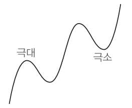
● 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극대이면 $f(a)$가 $x=a$의 충분히 가까운 근방에서 최댓값이다.

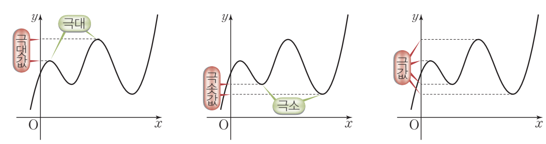
$x=a$를 포함하는 어떤 열린 구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x) \le f(a)$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **극대**가 된다고 하고, $f(a)$를 **극댓값**이라고 한다.

또 $x=a$를 포함하는 어떤 열린 구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x) \ge f(a)$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **극소**가 된다고 하고, $f(a)$를 **극솟값**이라고 한다.

이때 극댓값과 극솟값을 통틀어 **극값**이라고 한다.

● 극댓값이 반드시 극솟값보다 큰 것은 아니다.





참고 상수함수는 모든 실수에서 극값을 갖는다.

본문 해설

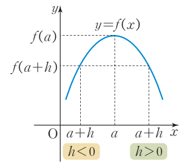
1 극댓값은 근방에서 최대인 값을 뜻한다. 만일 $f(a)$가 극댓값이면 $x=a$의 충분히 가까운 근방, 즉 a를 포함하는 구간 (c, d)가 존재해서 구간 (c, d)의 모든 x에 대하여 $f(x) \le f(a)$가 성립함을 뜻한다.
그러나 최댓값은 정의역인 구간 $[\alpha, \beta]$에서 가장 큰 값을 뜻하므로 만일 $f(b)$가 최댓값이면 구간 $[\alpha, \beta]$의 모든 x에 대하여 $f(x) \le f(b)$이다.

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 갖고 a를 포함하는 어떤 열린 구간에서 미분가능할 때, 함수의 극값을 판정하는 방법에 대하여 알아보자.

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 가지면 충분히 작은 $|h|$에 대하여

$h>0$이면 $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\le 0$

$h<0$이면 $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\ge 0$



이다. 이때 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하므로

$$0\le \lim_{h\to 0-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\le 0$$

이다.

따라서 $f'(a)=0$이다.

❶ 마찬가지 방법으로 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극솟값을 가지는 경우에도 $f'(a)=0$임을 알 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

극값의 판정

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고, $x=a$에서 극값을 가지면

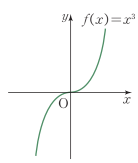
$$f'(a)=0$$

이다.

(미분계수)$=0$이지만 극값을 갖지 않는 경우도 있다.

❷ 위의 성질의 역은 일반적으로 성립하지 않는다.

예를 들어 함수 $f(x)=x^3$에서 $f'(x)=3x^2$이므로 $f'(0)=0$이지만, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다.

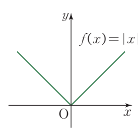


미분계수의 존재와 관계없이 극값을 가질 수 있다.

한편 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 갖더라도 $f'(a)=0$이 성립하지 않을 수도 있다.

예를 들어 함수 $f(x)=|x|$는 오른쪽 그림과 같이 구간 $(-1,\ 1)$에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x)\ge f(0)$이므로 극값의 정의에 의하여 $x=0$에서 함수 $y=|x|$는 극소가 된다.

그러나 $f'(0)$은 존재하지 않는다.



본문 해설

❶ 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고, $x=a$에서 극소일 때 $f'(a)=0$임을 증명하여 보자.

$f(a)$가 극솟값이라고 하자. 그러면 절댓값이 충분히 작은 h에 대하여 $f(a)\le f(a+h)$이므로

$h>0$이면 $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\ge 0$

((분모)>0, (분자)≥ 0)

$h<0$이면 $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\le 0$

((분모)<0, (분자)≥ 0)

$f'(a)$가 존재하므로

$$f'(a)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\ge 0 \quad\cdots\cdots ㉠$$

$$f'(a)=\lim_{h\to 0-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\le 0 \quad\cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $f'(a)=0$이다.

❷ 미분가능과 극대, 극소 사이의 관계는 다음과 같다.

(1) $f'(a)$가 존재하고 $f(a)$가 극값

$\Longrightarrow f'(a)=0$ (참)

(2) $f(a)$가 극값 $\Longrightarrow f'(a)=0$ (거짓)

(3) $f'(a)=0 \Longrightarrow f(a)$는 극값 (거짓)

지/도/자/료

1. 함수의 극값에 대한 정의는 직관적으로 이해하도록 지도한다. 또한 함수의 극대와 극소의 정의가 성립하려면 연속이어야 한다는 조건이 필요하다. 하지만 여기서는 다항함수만을 다루므로 연속이라는 조건은 생각하지 않아도 된다.

2. $f'(a)=0$인 것은 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 갖기 위한 필요조건이다. $f'(a)=0$이지만 $x=a$에서 극값을 갖지 않는 경우를 반례를 통해 이해하도록 지도한다.

예를 들면, $f(x)=x^3$에서 $f'(x)=3x^2$이므로 $f'(0)=0$이지만 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 극값을 갖지 않는다.

3. 함수는 극대이거나 극소인 점에서 (미분계수)$=0$이다. 그러나 미분가능하지 않은 점에서도 극대 또는 극소를 가질 수 있음을 유의해야 한다.

예를 들어, 함수 $f(x)=|x|$는 $x=0$에서 미분가능하지 않지만, 즉 $f'(0)$은 존재하지 않지만 극솟값을 가진다.

읽/기/자/료 페르마

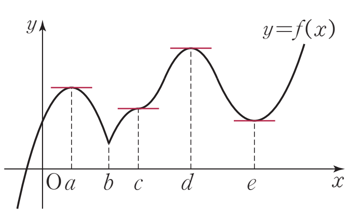
페르마(Fermat, Pierre de; 1601∼1665)는 프랑스의 법률가로 수학자는 아니지만 수학을 매우 좋아하였으며 데카르트와 더불어 해석기하학의 창시자로 불리운다. 곡선의 접선과 최대, 최소에 관한 그의 연구는 이후에 뉴턴의 미적분학을 이끄는 선구자적 업적으로 평가받고 있다.

본문 해설

❶ 극대와 극소의 판정은 그래프를 그려서 해도 좋지만, 먼저 함수의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들어 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌는 값을 찾는 것이 더 편리하다.

❷ 일반적으로 $f(a)$가 극값일지라도 $f'(a)$는 존재하지 않을 수도 있다.
다음은 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표와 그래프의 관계를 보인 것이다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$	d	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	없음	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗		↗	극대	↘	극소	↗



그래프에서 $f(a)$, $f(b)$, $f(d)$, $f(e)$는 극값이지만 $f'(a)=f'(d)=f'(e)=0$이고 $f'(b)$의 값은 존재하지 않는다.
한편 $f'(c)=0$이지만 $x=c$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로, 즉 증가와 감소가 바뀌지 않으므로 극값이 아니다.

교과서 120 쪽

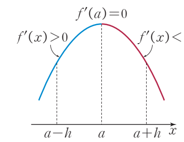
❶ 함수 $f(x)$의 극대와 극소를 나타내는 표를 만들면 각각 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	$f(a)$ (극대)	↘

x	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$f(a)$ (극소)	↗

이제 함수 $f(x)$가 미분가능할 때, 극댓값과 극솟값을 판정하는 방법에 대하여 알아보자.

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고, $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀐다고 하자. 이때 충분히 작은 양수 h에 대하여 x의 값이 $a-h$에서 a로 증가할 때 $f(x)$는 증가하고, x의 값이 a에서 $a+h$로 증가할 때 $f(x)$는 감소한다. 즉,



$$a-h<x<a\text{일 때}\quad f(x)\le f(a)$$
$$a<x<a+h\text{일 때}\quad f(a)\ge f(x)$$

이다. 따라서 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대가 된다.

마찬가지 방법으로 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고, $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소가 됨을 알 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

❷ **극대와 극소의 판정**

미분가능한 함수 $y=f(x)$에서 $f'(a)=0$이고, $x=a$의 좌우에서
(1) $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면
$f(x)$는 $x=a$에서 극대이고, 극댓값 $f(a)$를 가진다.
(2) $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌면
$f(x)$는 $x=a$에서 극소이고, 극솟값 $f(a)$를 가진다.

예제 01 함수 $f(x)=2x^3-3x^2+3$의 극값을 구하여라.

풀이 $f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3 (극대)	↘	2 (극소)	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 극댓값은 $f(0)=3$, $x=1$에서 극소이고 극솟값은 $f(1)=2$이다.

답 극댓값: 3, 극솟값: 2

1

목표| 함수의 극값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $f'(x)=3x^2-6x-9=3(x-3)(x+1)$이므로
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	5 (극대)	↘	-27 (극소)	↗

따라서 함수 $f(x)$는
$x=-1$에서 극대이고 극댓값은 $f(-1)=$**5**,
$x=3$에서 극소이고 극솟값은 $f(3)=$**−27**

지/도/자/료

미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$인 것은 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가질 필요조건이므로 이 조건만으로는 $x=a$에서 극값을 가진다고 말할 수 없다.
따라서 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌는가를 조사해야 한다는 점을 유의하여 지도하고, $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌면 극대, 음에서 양으로 바뀌면 극소가 됨을 알게 한다.

교과서 121 쪽

문제 1 다음 함수의 극값을 구하여라.

(1) $f(x)=x^3-3x^2-9x$　　(2) $f(x)=-2x^3+9x^2-12x-1$

예제 02 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$는 $x=0$에서 극댓값 0을 가지고, $x=2$에서 극솟값을 가진다고 한다. 이때 a, b, c의 값과 극솟값을 각각 구하여라.

풀이 $f'(x)=3x^2+2ax+b$이고 $f(x)$는 $x=0$과 $x=2$에서 극값을 가지므로

$f'(0)=b=0$, $f'(2)=12+4a+b=0$

$a=-3$, $b=0$

또 $x=0$일 때, 극댓값이 0이므로　$f(0)=c=0$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2$이므로 극솟값은　$f(2)=-4$

답　$a=-3$, $b=0$, $c=0$, 극솟값: -4

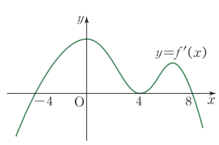
문제 2 함수 $f(x)=-x^3+ax^2+bx+1$은 $x=1$에서 극댓값 3을 가진다. 이때 a, b의 값과 극솟값을 각각 구하여라.

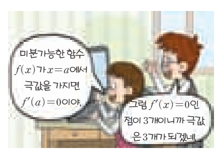
문제 3 함수 $f(x)=x^3-ax^2+ax+1$이 극댓값과 극솟값을 모두 갖기 위한 실수 a값의 범위를 구하여라.

사고력 기르기

추론
▶의사소통
문제 해결

다음 그림은 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프이다. 그래프를 보고 나눈 대화에서 잘못된 부분을 찾아 바르게 고치고, 그 이유를 말하여 보자.





(2) $f'(x)=-6x^2+18x-12=-6(x-2)(x-1)$이므로

$f'(x)=0$에서　$x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-6 (극소)	↗	-5 (극대)	↘

따라서 함수 $f(x)$는

$x=2$에서 극대이고 극댓값은　$f(2)=\mathbf{-5}$,

$x=1$에서 극소이고 극솟값은　$f(1)=\mathbf{-6}$

2

목표| 함수의 극값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $f'(x)=-3x^2+2ax+b$이고 $x=1$에서 극댓값 3을 가지므로

$f'(1)=0$, $f(1)=3$

$f'(1)=-3+2a+b=0$, $f(1)=a+b=3$에서　$\boldsymbol{a=0,\ b=3}$

이때 $f'(x)=-3x^2+3=-3(x-1)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=-1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	(극소)	↗	3	↘

따라서 함수 $f(x)=-x^3+3x+1$은 $x=-1$에서 극소이고 극솟값은　$f(-1)=\mathbf{-1}$

3

목표| 함수의 극값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $f'(x)=3x^2-2ax+a$이고 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. 따라서 $3x^2-2ax+a=0$에서

$$\frac{D}{4}=(-a)^2-3\times a=a^2-3a=a(a-3)>0$$

따라서　$\boldsymbol{a<0}$ **또는** $\boldsymbol{a>3}$

사고력 기르기 의사소통

출제 의도| 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이 극값을 가질 조건은 아니라는 것을 알게 한다. 즉 $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌는 것을 확인하게 한다.

풀이|

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	4	$\cdots$	8	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	(극소)	↗		↗	(극대)	↘

함수 $f(x)$는 $x=-4$, $x=4$, $x=8$에서 $f'(x)=0$이다.
이때 $f'(4)=0$이지만 $x=4$의 좌우에서 함수의 증가, 감소가 변하지 않으므로 극값을 갖지 않는다.
따라서 $f'(x)=0$인 점은 3개이지만, 극값은 2개이다.
즉, $f'(x)=0$인 점에서 항상 극값을 갖는 것은 아니다.

05 함수의 그래프

소단원 지도 목표

① 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있게 한다.
② 주어진 구간에서 정의된 함수의 최댓값과 최솟값을 구하고, 이를 활용할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 함수의 그래프를 그릴 때에는 이계도함수를 다루지 않으므로 직관적으로 그리도록 한다.
2. 최댓값과 최솟값을 구하는 문제에서는 주어진 함수의 정의역을 반드시 확인하도록 한다.
3. 곡선의 오목, 볼록은 다루지 않으므로 그래프의 개형을 그릴 때에는 직관적으로 그리도록 한다.

교과서 122 쪽

05 함수의 그래프

● 함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있다.

다항함수의 그래프의 개형은 어떻게 그리는가?

생각 열기

탐구 활동 함수 $f(x)=x^3-3x$에 대하여 다음 물음에 답하여 보자.

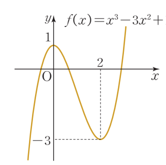
1. 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들어 보자.
2. 함수 $y=f(x)$의 극댓값과 극솟값을 구하여 보자.

다항함수의 그래프의 개형을 그릴 때, 함수의 증가와 감소, 극대와 극소, y축과의 교점 등을 이용하면 그 개형을 쉽게 그릴 수 있다.

예제 01 함수 $f(x)=x^3-3x^2+1$의 그래프의 개형을 그려라.

풀이 $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$이므로
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들고, 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	1 (극대)	↘	-3 (극소)	↗



문제 1 다음 함수의 그래프의 개형을 그려라.

(1) $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$　　(2) $f(x)=x^3+3x^2+3x+1$

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 도함수를 이용하여 함수의 증가 감소를 나타내는 표를 완성하고, 극값을 구함으로써 그래프의 개형을 직관적으로 그리도록 하려는 것이다.

1. $f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$이므로
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$
$f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

2. 함수 $f(x)$는
$x=-1$에서 극대이고 극댓값은 $f(-1)=\mathbf{2}$
$x=1$에서 극소이고 극솟값은 $f(1)=\mathbf{-2}$

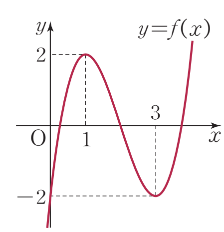
1

목표 | 다항함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있게 한다.

풀이 | (1) $f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)=0$에서
$x=1$ 또는 $x=3$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2 (극대)	↘	-2 (극소)	↗

따라서 함수 $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



교과서 123 쪽

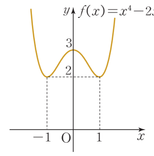
예제 **02** 함수 $f(x)=x^4-2x^2+3$의 그래프의 개형을 그려라.

풀이 $f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들고, 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	2 (극소)	$\nearrow$	3 (극대)	$\searrow$	2 (극소)	$\nearrow$



문제 **2** 다음 함수의 그래프의 개형을 그려라.

(1) $f(x)=2x^4-4x^2+1$ (2) $f(x)=-3x^4+4x^3$

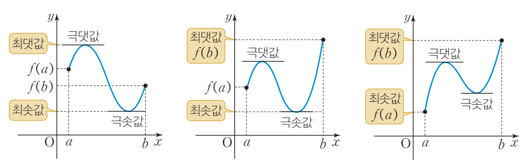
❶ 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 이용하여 구간 $[a, b]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구하여 보자.

최대 · 최소 정리에 의하여 함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속이면 함수 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 가진다. 특히 함수 $f(x)$의 극값과 구간 $[a, b]$에서 양 끝 점의 함숫값 $f(a)$, $f(b)$를 이용하면 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.

즉 극댓값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 큰 값이 최댓값이고, 극솟값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 작은 값이 최솟값이다.

이때 다음 그림과 같이 극댓값과 극솟값이 반드시 최댓값과 최솟값이 되는 것은 아니다.

❷



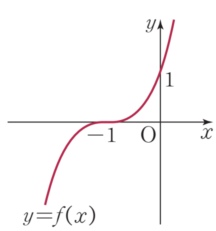
(2) $f'(x)=3x^2+6x+3=3(x+1)^2=0$에서

$x=-1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)=x^3+3x^2+3x+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



2

목표 | 다항함수의 그래프의 개형을 그릴 수 있게 한다.

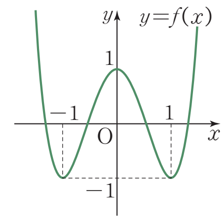
풀이 | (1) $f'(x)=8x^3-8x=8x(x-1)(x+1)=0$에서

$x=1$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-1 (극소)	$\nearrow$	1 (극대)	$\searrow$	-1 (극소)	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)=2x^4-4x^2+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



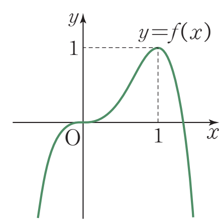
(2) $f'(x)=-12x^3+12x^2=-12x^2(x-1)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)=-3x^4+4x^3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



본문 해설

❶ 그래프를 보고 가장 큰 값과 가장 작은 값을 직관적으로 이해하게 함으로써 함수의 최댓값과 최솟값에 대한 개념을 자연스럽게 익히도록 한다.

❷ 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이면 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다. 따라서 연속함수는 주어진 닫힌 구간에서 구간이 양 끝값과 극값을 비교하여 최댓값과 최솟값을 정할 수 있다. 연속함수의 최댓값과 최솟값은 닫힌 구간이 아닌 경우에는 최댓값 또는 최솟값만 존재하거나 최댓값과 최솟값이 모두 존재하지 않을 수도 있음을 이해하도록 한다.

3

목표| 함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

이므로 $f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

구간 $[-1, 1]$에서 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0
$f(x)$	4	$\searrow$	0 (극소)	$\nearrow$	2	$\nearrow$	4 (극대)

따라서 **최댓값은 4, 최솟값은 0**이다.

(2) $f'(x)=-12x^3+24x^2-12x$

$=-12x(x-1)^2$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

구간 $[0, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$	0	$-$	0	$-$	-24
$f(x)$	3	$\searrow$	2	$\searrow$	-5

따라서 **최댓값은 3, 최솟값은 -5**이다.

교과서 124 쪽

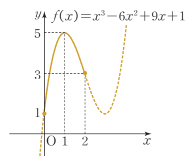
예제 03 구간 $[0, 2]$에서 함수 $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

풀이 $f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

구간 $[0, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들고, 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	1	$\nearrow$	5 (극대)	$\searrow$	3



따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 5, $x=0$일 때 최솟값 1을 가진다.

답 최댓값: 5, 최솟값: 1

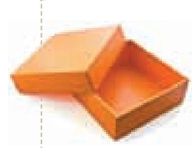
문제 3 다음 함수의 주어진 구간에서의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

(1) $f(x)=-x^3+3x^2$ $[-1, 1]$

(2) $f(x)=-3x^4+8x^3-6x^2+3$ $[0, 2]$

문제 4 구간 $[-1, 2]$에서 함수 $f(x)=x^3+3x^2+a$의 최솟값이 3일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

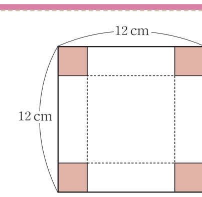
창의 up



한 변의 길이가 12 cm인 정사각형 모양의 종이가 있다. 이 종이의 네 모퉁이에서 크기가 같은 정사각형을 잘라 내고 나머지 부분을 접어서 뚜껑이 없는 상자를 만들려고 한다. 잘라 내는 정사각형의 한 변의 길이를 x cm라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 상자의 부피가 최대가 되는 x의 값을 구하여라.

(2) 상자의 부피의 최댓값을 구하여라.



4

목표| 함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

구간 $[-1, 2]$에서 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$2+a$	$\searrow$	a(극소)	$\nearrow$	$20+a$

따라서 최솟값은 a이고 최솟값이 3이므로 $\boldsymbol{a=3}$

창의 UP

출제 의도| 함수의 최대, 최소를 실생활 문제에 활용할 수 있게 한다.

풀이| (1) 상자의 부피를 $f(x)$ cm^{3}라고 하면

$f(x)=x(12-2x)^2$

$=4x^3-48x^2+144x$ (단, $0<x<6$)

$f'(x)=12(x^2-8x+12)=0$에서

$x=2$ 또는 $x=6$

그런데 $0<x<6$이므로 $x=2$

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	6
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	128(극대)	$\searrow$	0

따라서 **$x=2$(cm)일 때, 상자의 부피가 최대가 된다.**

(2) **상자의 부피의 최댓값은 128 cm^{3}이다.**

교과서 125 쪽

06 방정식과 부등식에의 활용

● 방정식과 부등식에 활용할 수 있다.

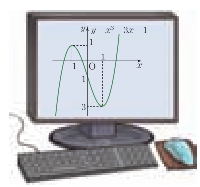
함수의 그래프는 방정식과 부등식에 어떻게 활용되는가?

생각 열기

탐구 활동

함수 $y=x^3-3x-1$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 물음에 답하여 보자.

1. 곡선 $y=x^3-3x-1$이 x축과 만나는 점의 x좌표를 구하는 방정식을 만들어 보자.
2. 그래프를 이용하여 1에서 구한 방정식의 실근의 개수를 구하여 보자.



함수의 그래프를 이용하여 방정식의 실근의 개수를 구하여 보자.

❶ 방정식 $f(x)=0$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표이다. 따라서 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축과의 교점의 개수와 같다.

또 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표이다. 따라서 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근의 개수는 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수와 같다.

이와 같이 함수의 그래프를 이용하면 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수를 구할 수 있다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 도함수를 이용한 방정식과 부등식의 기능적인 풀이보다는 그 원리를 이해할 수 있도록 한다.
2. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축과의 교점의 개수는 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수와 같음에 유의하도록 지도한다.
3. 삼차방정식과 사차방정식은 근의 공식이 있으나 고등학교에서는 다루지 않는 내용이므로 그래프의 교점을 이용하여 방정식의 실근의 개수 또는 근의 부호 등을 조사하게 한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 주어진 함수의 그래프를 보고 방정식의 실근의 개수가 함수의 그래프와 x축과의 교점의 개수와 같다는 사실을 알게 한다.

1. $x^3-3x-1=0$

2. 3개

지/도/자/료

1. 함수의 최대, 최소 문제는 정의역이 제한되어 있는 경우 그 범위에서 생각해야 한다. 따라서 주어진 구간에서의 극값과 구간의 양 끝 점에서의 함숫값을 비교하여 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 것이 최솟값이 된다.
2. 실생활 관련된 응용 문제를 다룰 때에는 정의역이 명시되어 있지 않은 경우가 있다. 이런 경우는 문제의 상황에 맞게 정의역을 정해야 한다.

06 방정식과 부등식에의 활용

소단원 지도 목표

① 도함수를 방정식에 활용할 수 있게 한다.
② 도함수를 부등식에 활용할 수 있게 한다.

본문 해설

❶ 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 방정식 $f(x)=0$의 실근과 같다는 것을 이해하고, 이것이 방정식의 실근의 개수를 구하는 유용한 도구임을 알게 한다.
또, 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표이다.
예를 들면 방정식 $f(x)-k=0$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$, $y=k$의 그래프의 교점의 x좌표임을 이해하게 한다.

1

목표| 도함수를 이용하여 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 방정식 $x^3-3x^2+3x+1=0$의 실근의 개수를 구하기 위하여

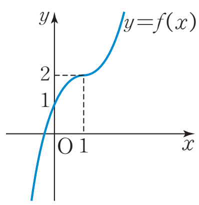
$f(x)=x^3-3x^2+3x+1$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$

$f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들고, 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\nearrow$



따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 x축과 한 점에서 만나므로 방정식의 실근은 **1**개이다.

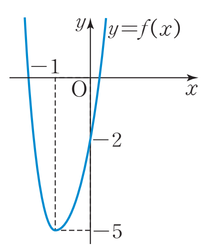
(2) 방정식 $x^4+4x-2=0$의 실근의 개수를 구하기 위하여

$f(x)=x^4+4x-2$로 놓으면

$f'(x)=4x^3+4=4(x+1)(x^2-x+1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$

$f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들고, 그래프를 그리면 다음과 같다.



x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-5	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 x축과 두 점에서 만나므로 방정식의 실근은 **2**개이다.

교과서 126 쪽

예제 01 방정식 $x^3-6x^2+9x-1=0$의 서로 다른 실근의 개수를 구하여라.

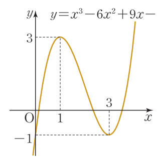
풀이 $f(x)=x^3-6x^2+9x-1$이라고 하면

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들고, 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 세 점에서 만나므로 방정식의 서로 다른 실근은 3개이다.

답 3

문제 1 그래프를 이용하여 다음 방정식의 서로 다른 실근의 개수를 구하여라.

(1) $x^3-3x^2+3x+1=0$ (2) $x^4+4x-2=0$

예제 02 방정식 $x^3-3x^2=a$가 서로 다른 세 실근을 가지기 위한 실수 a값의 범위를 구하여라.

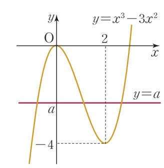
풀이 $f(x)=x^3-3x^2$이라고 하면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들고, 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$



따라서 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지기 위한 a값의 범위는 $-4<a<0$이다.

답 $-4<a<0$

문제 2 방정식 $2x^3-6x-a=0$이 서로 다른 세 실근을 가지기 위한 실수 a값의 범위를 구하여라.

2

목표| 도함수를 이용하여 $f(x)=g(x)$꼴의 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있게 한다.

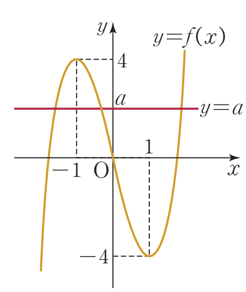
풀이| $2x^3-6x=a$에서 $f(x)=2x^3-6x$로 놓으면

$f'(x)=6x^2-6=6(x-1)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

$f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들고, 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-4	$\nearrow$



따라서 주어진 방정식이 서로 다른 세 개의 실근을 가지기 위한 a값의 범위는 $\quad$ $\boldsymbol{-4<a<4}$

교과서 127 쪽

함수의 그래프를 이용하여 부등식을 증명하여 보자.

어떤 구간에서 부등식 $f(x)\ge 0$이 성립함을 증명할 때에는 주어진 구간에서 함수 $y=f(x)$의 최솟값을 구하여 (최솟값)≥ 0임을 보이면 된다.

또 어떤 구간에서 부등식 $f(x)\ge g(x)$가 성립함을 증명할 때에는

$$h(x)=f(x)-g(x)$$

라 하고 주어진 구간에서 함수 $y=h(x)$의 최솟값을 구하여 (최솟값)≥ 0임을 보이면 된다.

예제 03 $x\ge 0$일 때, $x^3+2>x^2+x$가 성립함을 증명하여라.

어떤 구간에서 ($f(x)$의 최솟값)>0 이면 $f(x)>0$이다.

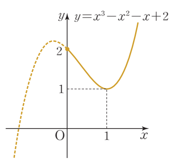
증명 $f(x)=(x^3+2)-(x^2+x)=x^3-x^2-x+2$라고 하면

$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들고, 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	2	↘	1	↗



주어진 구간에서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때, 극소이면서 최소이다. 그런데 최솟값이 $f(1)=1$이므로 $x\ge 0$인 모든 x에 대하여

$f(x)=(x^3+2)-(x^2+x)>0$

$x^3+2>x^2+x$

문제 3 다음 부등식이 성립함을 증명하여라.

(1) $x\ge -1$일 때, $x^3>3x^2-5$

(2) 모든 x에 대하여 $3x^4-4x^3+1\ge 0$

문제 4 모든 실수 x에 대하여 부등식 $2x^4-4x^2\ge k$가 성립하도록 실수 k값의 범위를 구하여라.

3

목표| 도함수를 이용하여 여러 가지 부등식을 증명할 수 있게 한다.

풀이| (1) $f(x)=x^3-(3x^2-5)=x^3-3x^2+5$라고 하면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)=0$에서

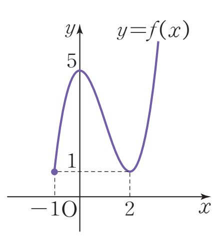
$x=0$ 또는 $x=2$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	1	↗	5	↘	1	↗

주어진 구간에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 $f(-1)=f(2)=1$이므로 $x\ge -1$인 모든 x에 대하여

$f(x)=x^3-(3x^2-5)>0$

따라서 $\boldsymbol{x^3>3x^2-5}$



(2) $f(x)=3x^4-4x^3+1$이라고 하면

$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	1	↘	0	↗

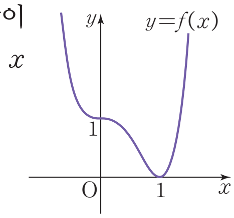
함수 $f(x)$의 최솟값이 $f(1)=0$이므로 모든 x에 대하여

$f(x)=3x^4-4x^3+1$

≥ 0

따라서

$\boldsymbol{3x^4-4x^3+1\ge 0}$



4

목표| 도함수를 이용하여 부등식이 성립하는 조건을 알게 한다.

풀이| $f(x)=2x^4-4x^2$이라고 하면

$f'(x)=8x^3-8x=8x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

$f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들고, 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-2	↗	0	↘	-2	↗

함수 $f(x)$의 최솟값은 -2이므로 $f(x)\ge -2$

따라서 부등식 $2x^4-4x^2\ge k$가 성립하는 실수 k의 범위는 $\boldsymbol{k\le -2}$이다.

07 속도와 가속도

소단원 지도 목표

① 미분계수의 뜻을 이용하여 수직선 위의 운동에서의 속도와 가속도의 뜻을 이해할 수 있게 한다.
② 도함수를 활용하여 속도와 가속도에 대한 문제를 해결할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 수직선 위를 움직이는 점의 위치의 시각에 대한 평균변화율로 평균 속도를 설명하고, 한순간의 시각에 대한 순간변화율을 생각하게 하여 순간 속도가 미분계수로 주어진다는 것을 이해하게 한다. 또, 속도의 순간변화율을 생각하여 가속도를 정의함을 이해시킨다.

2. 수직선 위를 움직이는 점의 속도와 가속도는 모두 부호와 크기를 가지는 양으로, 속도의 부호는 양의 방향과 음의 방향을 나타내며, 가속도의 부호는 속도의 증가, 감소를 나타냄을 이해시킨다.

교과서 128 쪽

07 속도와 가속도

● 속도와 가속도에 대한 문제에 활용할 수 있다.

도함수는 속도와 가속도에 어떻게 활용되는가?

생각 열기 **물 로켓**

물 로켓은 물과 공기를 이용하여 날아가도록 하는 로켓이다. 물 로켓은 압축된 공기의 힘으로 물을 뿜어 날아가는데, 페트병에 적당한 양의 물을 넣고 펌프를 이용하여 공기를 불어 넣어 주면 병 안의 공기가 압축되고 마개를 열어 주면 물을 뿜어내는 물의 힘으로 날아가게 된다.

탐구 활동 **지면에서 처음 속도 20 m/s로 똑바로 위로 쏘아 올린 물 로켓의 t초 후의 높이를 x m라고 하면 $x=20t-5t^2$이 성립한다고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.**

1. 쏘아 올린 후 1초에서 $(1+h)$초까지의 평균 속도를 구하여 보자.
2. 쏘아 올린 후 1초일 때의 순간변화율을 구하여 보자.

점 P가 수직선 위를 움직일 때, 시각 t에서 점 P의 위치를 x라고 하면 x는 t의 함수이므로 $x=f(t)$와 같이 나타낼 수 있다.

시각이 t에서 $t+\Delta t$까지 변할 때, 점 P의 위치의 변화량 Δx는

$$\Delta x=f(t+\Delta t)-f(t)$$

이므로 점 P의 평균 속도는 함수 $f(t)$의 평균변화율과 같고, 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$

❶ 이때 시각 t에서의 함수 $x=f(t)$의 순간변화율을 시각 t에서의 점 P의 순간 속도 또는 속도라 하고, 속도 v는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$$
$$=\frac{dx}{dt}$$

❷ 또 속도의 절댓값 $|v|$를 시각 t에서의 점 P의 속력이라고 한다.

1. 발사 후 1초에서 $(1+h)$초까지의 물 로켓의 평균 속도는

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{\{20\times(1+h)-5\times(1+h)^2\}-(20\times1-5\times1^2)}{(1+h)-1}$$
$$=\mathbf{10-5h(m/s)}$$

2. 1초가 되는 순간의 시각에 대한 높이의 순간변화율은

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\lim_{h\to 0}(10-5h)=\mathbf{10(m/s)}$$

본문 해설

❶ 속도는 위치의 순간변화율이며 방향과 크기를 동시에 갖는 양이므로 크기만을 갖는 속력과는 구별된다. 이때, 가속도는 속도의 순간변화율이므로 방향을 가진 양이다.

❷ 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 좌표 x가 시각 t의 함수 $x=f(t)$로 나타날 때, 시각 t에서의 점 P의 속도 v는 $v=f'(t)$이므로 점 P의 속력은 $|v|=|f'(t)|$이다.

생각 열기 참/고/자/료

보통 로켓을 생각하면 우주로 날아가는 로켓을 생각한다. 하지만 로켓은 탈것이 아닌 추진기관을 가진 비행체를 말한다. 물 로켓의 원리는 실물 로켓의 원리와 거의 유사한데, 차이점이 있다면 실물 로켓은 가스나 기체 등을 내뿜으면서 발사하고, 물 로켓은 물을 뿜으면서 발사한다는 점이다. 그러나 물을 뿜어 추진력을 얻는 것이나 가스등을 뿜어 추진력을 얻는 것은 같은 이치이다. 즉 이것은 작용과 반작용의 법칙에 의해 발사된다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 실생활에서 쉽게 볼 수 있는 물 로켓을 통해 시간과 물 로켓의 높이 사이에 성립하는 관계식으로부터 평균 속도와 순간속도의 의미를 생각해 보게 한다.

한편 점 P의 속도 v도 t의 함수이므로 이 함수의 순간변화율을 생각할 수 있다. 이때 시각 t에서의 속도 v의 순간변화율을 시각 t에서의 점 P의 가속도라 하고, 가속도 a는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$a=\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

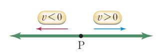
위치
↓미분
속도
↓미분
가속도

속도와 가속도

❶ 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치를 $x=f(t)$라고 하면, 시각 t에서의 점 P의 속도 v와 가속도 a는 다음과 같다.

(1) $v=\frac{dx}{dt}=f'(t)$ ❷ (2) $a=\frac{dv}{dt}=v'(t)$

❸ **참고** $v=f'(t)$의 부호는 점 P가 움직이는 방향을 나타낸다. 점 P가 움직이는 방향은 $v>0$일 때 양의 방향이고, $v<0$일 때 음의 방향이다.



예제 01 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=t^3-12t$일 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) $t=1$일 때의 점 P의 속도와 가속도를 각각 구하여라.

(2) 점 P가 움직이는 방향을 바꾸는 것은 출발한 지 몇 초 후인지 구하여라.

풀이 (1) 시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라고 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-12$, $a=\frac{dv}{dt}=6t$

따라서 $t=1$일 때의 속도와 가속도는

$v=3\cdot1^2-12=-9$, $a=6\cdot1=6$

(2) 점 P가 움직이는 방향을 바꿀 때, $v=0$이므로

$v=3t^2-12=0$에서 $t=2$ $(t>0)$

따라서 $0<t<2$일 때 $v<0$이고, $t>2$일 때 $v>0$이므로 점 P가 움직이는 방향을 바꾸는 것은 출발한 지 2초 후이다.

답 (1) 속도: -9, 가속도: 6 (2) 2초 후

문제 1 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=-t^3+3t^2-2t$일 때, $t=2$일 때의 속도와 가속도를 각각 구하여라.

본문 해설

❶ 속도는 크기와 방향을 가진 벡터이며 속도 벡터의 크기를 속력이라고 한다. 그러나 직선 운동과 같이 한 방향으로만 움직이는 경우는 속도와 속력을 구별하지 않고 사용할 때도 있다.

❷ 시각 t에서의 위치를 x라고 할 때, 가속도는 $\frac{d^2x}{dt^2}$이지만 이계도함수를 다루지 않으므로 이와 같은 기호는 사용하지 않는다.

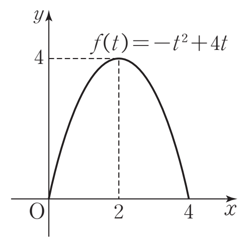
❸ 도함수 $f'(x)$의 부호를 이용하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 판정할 수 있듯이 속도 $f'(t)$의 부호를 조사하면 수직선 위를 움직이는 점 P의 운동 방향을 다음과 같이 판단할 수 있다.

(i) 어떤 구간에서 $f'(t)>0$이면 $f(t)$는 증가한다. 즉, 점 P는 수직선의 양의 방향으로 움직인다.

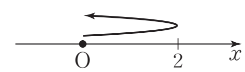
(ii) 어떤 구간에서 $f'(t)<0$이면 $f(t)$는 감소한다. 즉, 점 P는 수직선의 음의 방향으로 움직인다.

(iii) 시각 $t=a$에서 $f'(a)=0$이고 $t=a$의 좌우에서 $f'(t)$의 부호가 바뀌면 점 P는 $t=a$에서 운동 방향을 바꾼다.

예를 들어, x축 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $f(t)$가 $f(t)=-t^2+4t$ (단, $0\le t\le 4$)일 때, $f'(t)=-2t+4$이므로 $[0, 2]$에서 $f(t)$는 증가하고, $[2, 4]$에서 $f(t)$는 감소한다. 즉, $t=2$에서 운동 방향을 바꾼다.



[위치 그래프]



[실제 움직임]

1

목표| 도함수를 이용하여 속도와 가속도를 구할 수 있게 한다.

풀이| 시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라고 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=-3t^2+6t-2$$

$$a=\frac{dv}{dt}=-6t+6$$

따라서 $t=2$일 때, **속도는 -2, 가속도는 -6**이다.

읽/기/자/료 벡터와 스칼라

물리적인 양을 표시하는 방법에는 크게 두 가지가 있는데 이를 각각 벡터(Vector)와 스칼라(Scalar)라고 한다.

- 벡터: 크기와 방향을 함께 가지는 물리량으로 힘, 속도, 가속도, 변위 등이 이에 해당한다.
- 스칼라: 벡터가 크기와 방향을 함께 가지는 물리량이라면 스칼라는 크기만을 갖는 물리량을 뜻한다. 따라서 스칼라는 방향을 갖지 않으며 주로 실수로 사용해서 나타낸다. 길이, 넓이, 부피, 온도, 무게, 속력, 이동 거리 등이 이에 해당한다.

2

목표| 도함수를 활용하여 속도와 가속도에 대한 실생활 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| (1) $v=\dfrac{dx}{dt}=26-1.3t$,

$a=\dfrac{dv}{dt}=-1.3$

이므로 제동을 건 후 2초일 때의 속도는 **23.4**, 가속도는 **-1.3**

(2) 속도 $v=26-1.3t=0$에서

$\boldsymbol{t=20}$**(초)**

이때의 움직인 거리 x는

$x=26\times20-0.65\times20^2=\mathbf{260}$

단원 과제

목표| 항공기가 이륙하기 위해 시간에 대한 활주로 상의 이동 거리의 관계식을 통해 이륙하기까지의 이동 거리를 구할 수 있게 한다.

풀이| 비행기가 활주로를 이륙하는 속도 200(km/h)를 m 단위로 고치면 속도는

$v=200(\text{km/h})=\dfrac{200\times1000}{60\times60}=\dfrac{2000}{36}(\text{m/s})$

이므로

$\dfrac{dD}{dt}=v=\dfrac{20}{9}t=\dfrac{2000}{36}$에서 $t=25$(초)

따라서 비행기가 활주로에서 이동한 거리 D는

$D=\dfrac{10}{9}\times25^2=\mathbf{\dfrac{6250}{9}}$**(m)**

지/도/자/료 시각에 따른 여러 가지 변화율

길이 $l(t)$의 시각 t에 대한 변화율은 $l'(t)$이고, 넓이 $S(t)$의 시각 t에 대한 변화율은 $S'(t)$, 부피 $V(t)$의 시각에 대한 변화율은 $V'(t)$이다.
예를 들어 시각 t에 따라 반지름의 길이 $r(t)$가 변하는 구에 대하여 $r(t)=3t$라고 하면 구의 겉넓이 $S(t)$와 부피 $V(t)$는

$$S(t)=36\pi t^2,\ V(t)=36\pi t^3$$

이다. 이때, 반지름의 길이의 변화율, 겉넓이의 변화율, 부피의 변화율은 각각 다음과 같다.

$$r'(t)=3,\ S'(t)=72\pi t,\ V'(t)=108\pi t^2$$

교과서 130 쪽

예제 02 지면에서 30 m/s의 속도로 야구공을 똑바로 위로 던지면 t초 후의 높이 x m가 $x=30t-5t^2$이라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 공이 최고 높이에 도달하는 데 걸리는 시간과 이때의 높이를 구하여라.

(2) 공이 지면에 떨어지는 순간의 속도를 구하여라.

풀이 (1) t초 후의 속도를 v라고 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=30-10t$

최고 높이에 도달할 때, $v=0$이므로 걸리는 시간은

$v=30-10t=0$에서 $t=3$

이때의 높이는

$x=30\cdot3-5\cdot3^2=45(\text{m})$

(2) 물체가 지면에 떨어질 때, $x=0$이므로

$x=30t-5t^2=0$에서 $t=6\ (t>0)$

이때의 속도는

$v=30-10\cdot6=-30(\text{m/s})$

답 (1) 3초, 45 m (2) -30 m/s

문제 2 직선 궤도 위를 달리는 열차에 제동을 건 후, t초 동안 움직인 거리 x가 $x=26t-0.65t^2$일 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 제동을 건 후 2초일 때의 속도와 가속도를 각각 구하여라.

(2) 제동을 건 후 정지할 때까지 걸린 시간과 움직인 거리를 각각 구하여라.

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

항공기의 이륙 거리는 여러 가지 요인에 의해 달라지지만, 일반적으로 항공기의 무게, 기후, 활주로의 상태에 따라 다르다.

항공기가 이륙하기 위해 t초 동안 활주로 상을 이동한 거리가 $D=\dfrac{10}{9}t^2$(m)라고 하자.

비행기의 속도가 200 km/h에 도달하면 활주로 상공으로 이륙하기 시작한다고 할 때, 비행기가 활주로 상에서 이동한 거리를 구하여라. (단, t는 브레이크를 놓는 순간부터 측정한 시간이다.)

읽/기/자/료 뉴턴(Newton, I. ; 1642~1727)

- **출생지:** 영국
- **성장 과정:** 아버지는 출생 전에 사망하고, 어머니는 그가 3세 때 재혼하는 등 불운한 소년 시절을 보냈다. 1664년 캠브리지의 트리니티 대학에서 학사 학위를 얻었고, 1664년부터 1666년까지 페스트로 대학이 일시 폐쇄되어 고향에서 지내면서 그의 대부분의 업적을 이루었다. 이후 석사를 마친 뉴턴은 1669년에 교수가 되었고, 1665년 이항정리의 연구를 시작으로 급수로 발전하여 현재 미적분법에 해당하는 유분법(流分法)을 발견하여 부피를 구하는 문제와 접선 문제에 응용하였다.
- **주요 업적:** 물리학자, 천문학자, 수학자, 근대 이론학의 선구자로 수학에서의 미적분법 창시, 물리학에서의 뉴턴 역학의 체계 확립, 이를 위한 수학적 방법 등은 자연 과학의 모범이 되었고, 사상면에서도 후세에 커다란 영향을 끼쳤다.

[해답 p.206]

중단원 기초

수준별 학습

1 곡선 $y=x^2-3x+5$에 대하여 다음을 구하여라. — 01 접선의 방정식

(1) 곡선 위의 점 (1, 3)에서의 접선의 방정식

(2) 이 곡선에 접하고 기울기가 3인 접선의 방정식

2 함수 $f(x)=x^3+8x$에 대하여 구간 [0, 1]에서 평균값 정리를 만족시키는 c의 값을 구하여라. — 02 평균값 정리

3 다음 함수의 증가와 감소를 조사하여라. — 03 함수의 증가와 감소

(1) $f(x)=4x-x^2$ (2) $f(x)=x^3+3x^2+3x+2$

4 다음 함수의 극값을 구하여라. — 04 함수의 극대와 극소

(1) $f(x)=-2x^3+6x+1$ (2) $f(x)=x^4-4x^3+4x^2+1$

5 다음 함수의 그래프의 개형을 그려라. — 05 함수의 그래프

(1) $f(x)=2x^3-6x+2$ (2) $f(x)=3x^4-4x^3+1$

6 다음 방정식의 서로 다른 실근의 개수를 구하여라. — 06 방정식과 부등식에의 활용

(1) $x^3-3x-2=0$ (2) $x^3-6x^2-x+14=2-10x$

7 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치가 $x=t^3-t^2$일 때, 시각 $t=2$에서의 속도와 가속도를 각각 구하여라. — 07 속도와 가속도

중/단/원 기초

1

목표| 도함수를 이용하여 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) 곡선 $y=x^2-3x+5$ 위의 점 (1, 3)에서의 접선의 기울기는 $f(x)=x^2-3x+5$로 놓으면

$f'(x)=2x-3$에서 $f'(1)=2\cdot1-3=-1$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-3=-(x-1)$

$\boldsymbol{y=-x+4}$

(2) 접선의 기울기가 3이므로 접점의 x좌표를 a라고 하면

$f'(a)=2a-3=3$, $a=3$

이때, 접점의 좌표는 (3, 5), 즉 $f(3)=5$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-5=3(x-3)$

$\boldsymbol{y=3x-4}$

2

목표| 평균값 정리를 만족시키는 상수 c를 구할 수 있게 한다.

풀이| 함수 $f(x)=x^3+8x$는 구간 [0, 1]에서 연속이고 열린 구간 (0, 1)에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(c)$ $(0<c<1)$인 c가 적어도 하나 존재한다.

평균값 정리를 만족시키는 c를 구하면

$\dfrac{9-0}{1-0}=3c^2+8$, $3c^2=1$

$0<c<1$에서 $c=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$

3

목표| 미분을 이용하여 함수의 증가, 감소를 판별할 수 있게 한다.

풀이| (1) $f'(x)=4-2x=2(2-x)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=2$

$f'(x)>0$에서 $x<2$

$f'(x)<0$에서 $x>2$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 2)$에서 **증가하고, 구간 $(2, \infty)$에서 감소한다.**

(2) $f'(x)=3x^2+6x+3=3(x+1)^2$이므로 모든 실수 x에 대해 $f'(x)\ge0$

따라서 함수 $f(x)$는 **구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가한다.**

4

목표| 도함수를 이용하여 함수의 극값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $f'(x)=-6x^2+6=-6(x+1)(x-1)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-3 (극소)	↗	5 (극대)	↘

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(1)=\boldsymbol{5}$, 극솟값은 $f(-1)=\boldsymbol{-3}$이다.

(2) $f'(x)=4x^3-12x^2+8x=4x(x-2)(x-1)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	1 (극소)	↗	2 (극대)	↘	1 (극소)	↗

따라서 함수 $f(x)$는

$x=1$에서 극대이고 극댓값은 $f(1)=$ **2**

$x=0$, 2에서 극소이고 극솟값은 $f(0)=f(2)=$ **1**

5

목표| 도함수를 이용하여 함수의 그래프를 그릴 수 있게 한다.

풀이| (1) $f'(x)=6x^2-6=6(x-1)(x+1)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

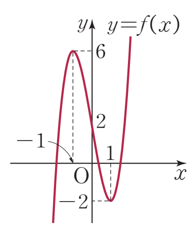
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	6 (극대)	↘	-2 (극소)	↗

함수 $f(x)$는

$x=-1$에서 극댓값 6,

$x=1$에서 극솟값 -2를 갖는다.

따라서 함수 $f(x)=2x^3-6x+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2) $f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

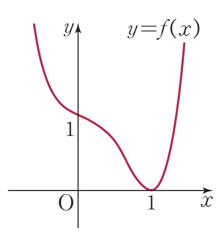
x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	1	↘	0 (극소)	↗

함수 $f(x)$는

$x=1$에서 극솟값 0을 갖는다.

따라서 함수

$f(x)=3x^4-4x^3+1$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



6

목표| 도함수를 방정식에 활용할 수 있게 한다.

풀이| (1) 방정식 $x^3-3x-2=0$의 실근의 개수를 구하기 위하여 $f(x)=x^3-3x-2$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-3$

$=3(x-1)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0 (극대)	↘	-4 (극소)	↗

따라서 곡선 $y=x^3-3x-2$는 x축과 두 점에서 만나므로 방정식 $x^3-3x-2=0$의 실근은 **2**개이다.

(2) $x^3-6x^2-x+14=2-10x$에서

$x^3-6x^2+9x+12=0$

방정식 $x^3-6x^2+9x+12=0$의 실근의 개수를 구하기 위하여 $f(x)=x^3-6x^2+9x+12$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12x+9$

$=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	16 (극대)	↘	12 (극소)	↗

따라서 곡선 $y=x^3-6x^2+9x+12$는 x축과 한 점에서 만나므로 방정식 $x^3-6x^2+9x+12=0$의 실근은 **1**개이다.

7

목표| 도함수를 이용하여 속도와 가속도를 구할 수 있게 한다.

풀이| 시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라고 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-2t$$

$$a=\frac{dv}{dt}=6t-2$$

따라서 $t=2$일 때, 속도는 **8**, 가속도는 **10**이다.

중단원 기본

[해답 p.206]

수준별 학습

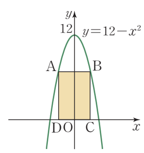
1 곡선 $y=x^3-3x^2+x-2$ 위의 점 $(1,\ -3)$을 지나고, 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 방정식을 구하여라.　01 접선의 방정식

2 함수 $f(x)=|x-2|$에 대하여 닫힌 구간 $[1,\ 3]$에서 $f'(c)=0$을 만족시키는 c가 열린 구간 $(1,\ 3)$에 존재하는지 말하여라.　02 평균값 정리

3 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+(5a-4)x+2$가 모든 실수에서 증가하기 위한 실수 a값의 범위를 구하여라.　03 함수의 증가와 감소

4 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$가 $x=-1$에서 극댓값을 갖고, $x=3$에서 극솟값 -23을 가질 때, 극댓값을 구하여라.　04 함수의 극대와 극소

5 오른쪽 그림과 같이 밑변은 x축 위에, 두 꼭짓점은 곡선 $y=12-x^2$ 위에 있는 직사각형 ABCD의 넓이의 최댓값을 구하여라.　05 함수의 그래프 최댓값과 최솟값



6 곡선 $y=x^3-x$와 직선 $y=2x+k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k값의 범위를 구하여라.　06 방정식과 부등식에의 활용

7 어떤 자동차가 브레이크를 밟은 후 t초 동안 움직인 거리를 x m라고 하면 $x=18t-0.45t^2$이 성립한다고 하자. 이 자동차가 브레이크를 밟은 후, 정지할 때까지 움직인 거리를 구하여라.　07 속도와 가속도

중/단/원 기본

1

목표| 도함수를 이용하여 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| 곡선 $y=x^3-3x^2+x-2$ 위의 점 $(1,\ -3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(x)=3x^2-6x+1$에서

$f'(1)=-2$

따라서 이 점에서의 접선에 수직인 직선의 방정식의 기울기는 $\frac{1}{2}$이므로 구하는 직선의 방정식은

$y+3=\frac{1}{2}(x-1)$

$\boldsymbol{y=\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}}$

2

목표| 평균값 정리를 만족시키는 조건을 이해할 수 있게 한다.

풀이| 함수 $f(x)$는 구간 $(1,\ 2)$에서

$f(x)=-x+2,\ f'(x)=-1$이고

구간 $(2,\ 3)$에서

$f(x)=x-2,\ f'(x)=1$이다.

또 $x=2$에서 미분가능하지 않으므로

$f'(c)=0$인 c가 구간 $(1,\ 3)$에서 존재하지 않는다.

3

목표| 도함수를 이용하여 함수의 증가 구간 또는 감소 구간을 구할 수 있게 한다.

풀이| $f'(x)=x^2+2ax+(5a-4)$이고 함수 $f(x)$가 모든 실수에서 증가하므로 항상 $f'(x)\geq 0$이어야 한다.

$f'(x)=x^2+2ax+(5a-4)\geq 0$에서

$\frac{D}{4}=a^2-(5a-4)\leq 0,\ (a-1)(a-4)\leq 0$

따라서　$\boldsymbol{1\leq a\leq 4}$

4

목표| 도함수를 이용하여 함수의 극값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $f'(x)=3x^2+2ax+b$이고 $x=-1$에서 극댓값을 가지므로

$f'(-1)=3-2a+b=0,\ 2a-b=3$　⋯⋯ ㉠

$x=3$에서 극솟값을 가지므로

$f'(3)=3\cdot 3^2+2a\times 3+b=0,\ 6a+b=-27$　⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면　$a=-3,\ b=-9$

이때 $f(x)=x^3-3x^2-9x+c$인데 $x=3$일 때 극솟값 -23을 가지므로

$f(3)=27-27-27+c=-23,\ c=4$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2-9x+4$에 $x=-1$을 대입하면 $f(x)$의 극댓값은

$f(-1)=-1-3+9+4=\mathbf{9}$

5

목표| 도함수를 이용하여 최댓값을 구할 수 있게 한다.

풀이| 점 C의 좌표를 $(a,\ 0)$ $(a>0)$이라고 하면 $\mathrm{B}(a,\ 12-a^2)$, $\mathrm{A}(-a,\ 12-a^2)$, $\mathrm{D}(-a,\ 0)$

따라서 직사각형 ABCD의 넓이는

$S(a)=2a(12-a^2)=-2a^3+24a$

$S'(a)=-6a^2+24=-6(a-2)(a+2)$

a	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$S'(a)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$S(a)$	↘	극소	↗	극대	↘

그러므로 $S(a)$는 $a=2$일 때 극대이면서 최댓값을 가지므로 □ABCD의 최댓값은

$-2\times2^3+24\times2=\mathbf{32}$

6

목표| 도함수를 방정식에 활용할 수 있게 한다.

풀이| $x^3-x=2x+k$에서 $x^3-3x=k$라 하면 곡선 $y=x^3-3x$와 직선 $y=k$가 세 점에서 만나는 k값의 범위를 구하면 된다.

$f(x)=x^3-3x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2 (극대)	↘	-2 (극소)	↗

주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=x^3-3x$와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같으므로 서로 다른 세 개의 실근을 가지기 위한 k값의 범위는

$\mathbf{-2<\mathit{a}<2}$

7

목표| 도함수를 속도, 가속도 문제에 활용할 수 있게 한다.

풀이| 속도 $v=18-0.9t$이므로

$v=0$에서 $t=20$(초)

따라서 자동차가 정지할 때까지 움직인 거리는

$x=18\times20-0.45\times20^2=\mathbf{180(m)}$

교과서 133 쪽

중단원 실력

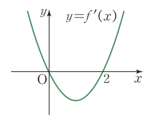
[해답 p.206]

수준별 학습

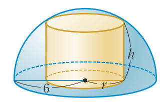
1 곡선 $y=x^3+ax^2+(2a+1)x+a+5$는 a의 값에 관계없이 항상 점 P를 지날 때, 점 P에서의 접선의 방정식을 구하여라. — 01 접선의 방정식

2 함수 $f(x)=x^2$에 대하여 $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a+\theta h)$를 만족시키는 상수 θ $(0<\theta<1)$의 값을 구하여라. (단, $h>0$) — 02 평균값 정리

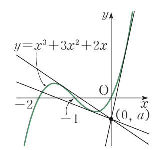
3 오른쪽 그림은 함수 $y=f'(x)$의 그래프를 나타낸 것이다. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$의 극솟값이 6일 때, 극댓값을 구하여라. (단, a, b, c는 상수이다.) — 04 함수의 극대와 극소



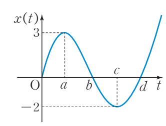
4 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 6인 반구에 직원기둥이 내접하고 있다. 이 직원기둥의 부피의 최댓값을 구하여라. — 05 함수의 그래프 최댓값과 최솟값



5 점 $(0,\ a)$에서 곡선 $y=x^3+3x^2+2x$에 서로 다른 세 접선을 그을 수 있을 때, 상수 a값의 범위를 구하여라. — 06 방정식과 부등식에의 활용



6 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x(t)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 설명 중에서 옳은 것을 찾아라. — 07 속도와 가속도



ㄱ. $0<t<d$에서 $t=a$일 때, 점 P의 속도는 최대이다.
ㄴ. $t=b$일 때, 점 P는 움직이는 방향을 바꾼다.
ㄷ. $c<t<d$에서 점 P는 양의 방향으로 움직인다.

중/단/원 실력

1

목표| 도함수를 이용하여 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| $a(x^2+2x+1)+(x^3+x+5-y)=0$

$x^2+2x+1=(x+1)^2=0$에서 $x=-1$

$x^3+x+5-y=0$에 $x=-1$을 대입하면 $y=3$

따라서 $\mathrm{P}(-1,\ 3)$

$f(x)=x^3+ax^2+(2a+1)x+a+5$라고 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+(2a+1)$

$f'(-1)=3-2a+2a+1=4$

따라서 구하는 접선의 방정식은 점 $\mathrm{P}(-1,\ 3)$을 지나고, 기울기가 4이므로 $y-3=4(x+1)$, $\boldsymbol{y=4x+7}$

2

목표| 평균값 정리를 만족시키는 상수 θ의 값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $f(x)=x^2$에서 $f'(x)=2x$이고

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{(a+h)^2-a^2}{h}$$
$$=2a+h$$

$f'(a+\theta h)=2a+2\theta h$

따라서 $2a+h=2a+2\theta h$이므로 $\theta=\mathbf{\frac{1}{2}}$

3

목표| 도함수를 이용하여 함수의 극값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$y=f'(x)$의 그래프에서

$f'(x)=3x(x-2)=3x^2-6x$

따라서 $3x^2+2ax+b=3x^2-6x$이므로

$a=-3,\ b=0$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	(극대)	↘	(극소)	↗

이때 $f(x)=x^3-3x^2+c$이고 $x=2$에서 극소이므로

$f(2)=8-12+c=6,\ c=10$

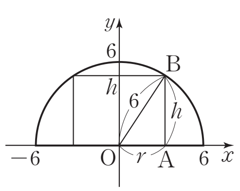
따라서 $f(x)=x^3-3x^2+10$이고 극댓값은

$f(0)=c=\mathbf{10}$

4

목표| 도함수를 이용하여 직원기둥의 부피의 최댓값을 구할 수 있게 한다.

풀이|



삼각형 OAB에서 $36=r^2+h^2$

직원기둥의 부피를 V라고 하면

$V=\pi r^2h=\pi(36-h^2)h$

$=-\pi h^3+36\pi h$ (단, $0<h<6$)

$V'=-3\pi h^2+36\pi$

$V'=-3\pi(h^2-12)$

$=-3\pi(h+2\sqrt{3})(h-2\sqrt{3})$

$=0$

에서 $h=2\sqrt{3}$ 또는 $h=-2\sqrt{3}$

$0<h<6$이므로 $h=2\sqrt{3}$

$h=2\sqrt{3}$일 때 V는 극대이면서 최대이므로 직원기둥의 최댓값은

$V=-\pi\times24\sqrt{3}+36\pi\times2\sqrt{3}=\mathbf{48\sqrt{3}\pi}$

5

목표| 도함수를 방정식에 활용할 수 있게 한다.

풀이| 점 $(0,\ a)$에서 곡선에 그은 접선의 접점을 $(\alpha,\ \beta)$라고 하면 $y'=3x^2+6x+2$이므로 접선의 기울기는 $3\alpha^2+6\alpha+2$이다. 따라서 접선의 방정식은

$y-\beta=(3\alpha^2+6\alpha+2)(x-\alpha)$

이 접선이 점 $(0,\ a)$를 지나므로

$a-\beta=(3\alpha^2+6\alpha+2)(-\alpha)$

$\beta=\alpha^3+3\alpha^2+2\alpha$를 대입하여 정리하면

$2\alpha^3+3\alpha^2=-a,\ 2\alpha^3+3\alpha^2+a=0$

이 방정식이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로

$f(\alpha)=2\alpha^3+3\alpha^2$이라고 하면

$f'(\alpha)=6\alpha^2+6\alpha=0$

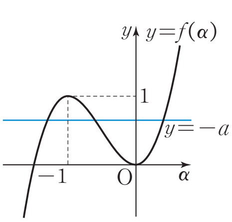
$\alpha=-1$ 또는 $\alpha=0$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(\alpha)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(\alpha)$	↗	1	↘	0	↗

두 함수 $f(\alpha)=2\alpha^3+3\alpha^2$과 $y=-a$의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$0<-a<1$

$\mathbf{-1<a<0}$



6

목표| 도함수를 속도와 가속도 문제에 활용할 수 있게 한다.

풀이| ㄱ. $t=a$일 때 점 P의 속도는 $x'(a)=0$

ㄴ. $t=b$일 때 점 P가 움직이는 방향은 변하지 않는다.

따라서 옳은 것은 ㄷ이다.

참고| $x(t)$는 $t=a$일 때 최댓값,

$t=6$일 때 최솟값을 가지고,

$t=a,\ t=c$에서 점 P가 움직이는 방향이 바뀐다.

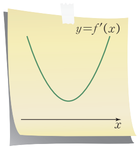
교과서 134 쪽

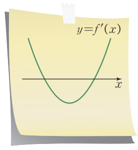
수행 과제

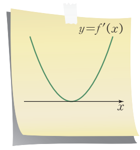
함수 $y=f(x)$의 그래프와 도함수 $y=f'(x)$의 그래프 사이의 관계

함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프를 이용하면 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 생각할 수 있다.

삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\,(a>0)$의 도함수 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$의 그래프는 상수 a, b, c의 값에 따라 다음과 같이 나타낼 수 있다. 다음 도함수 $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 물음에 답하여 보자.

㉠


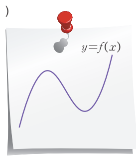
㉡


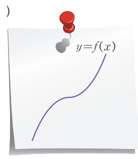
㉢


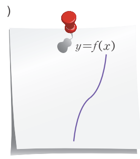
| 과 제 | **1** $f'(x)=0$을 만족시키는 x값의 개수를 각각 구하여 보자.

| 과 제 | **2** $f'(x)=0$을 만족시키는 x값의 좌우에서 부호 변화를 조사하여 극댓값 또는 극솟값의 개수를 각각 구하여 보자.

| 과 제 | **3** 1, 2를 이용하여 위의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프와 다음 함수 $y=f(x)$의 그래프를 서로 알맞게 짝지어 보자.

(　　)


(　　)


(　　)


교과서 135 쪽

대단원 학습 내용 정리

① 미분계수

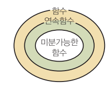
함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 순간변화율 또는 미분계수는

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

② 미분계수의 의미와 연속성

(1) 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기와 같다.

(2) 함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다. 그러나 그 역은 일반적으로 성립하지 않는다.



③ 도함수

(1) 미분가능한 함수 $y=f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

(2) $y=x^n$ (n은 양의 정수)이면 $y'=nx^{n-1}$이다.
특히 $y=c$ (c는 상수)이면 $y'=0$이다.

(3) 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때

① $\{cf(x)\}'=cf'(x)$ (단, c는 상수)

② $\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$

③ $\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$

④ $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

④ 접선의 방정식

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

⑤ 평균값 정리

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고, 열린 구간 $(a,\ b)$에서 미분가능할 때

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

가 되는 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

⑥ 함수의 증가와 감소

함수 $y=f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고, 이 구간의 모든 x에 대하여

(1) $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.

(2) $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

⑦ 함수의 극대와 극소

(1) 미분가능한 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$이다.

(2) 미분가능한 함수 $f(x)$가 $f'(a)=0$일 때, $x=a$의 좌우에서

① $f'(x)$의 부호가 양$(+)$에서 음$(-)$으로 바뀌면, $f(x)$는 $x=a$에서 극대이고, 극댓값 $f(a)$를 가진다.

② $f'(x)$의 부호가 음$(-)$에서 양$(+)$으로 바뀌면, $f(x)$는 $x=a$에서 극소이고, 극솟값 $f(a)$를 가진다.

⑧ 함수의 그래프, 최댓값과 최솟값

(1) 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수의 증가와 감소, 극대와 극소, 좌표축과의 교점을 조사하면 그 개형을 그릴 수 있다.

(2) 함수 $y=f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 극값을 가질 때

① $f(x)$의 최댓값은 극댓값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 큰 값이다.

② $f(x)$의 최솟값은 극솟값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 작은 값이다.

⑨ 방정식과 부등식에의 활용

(1) 방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축과의 교점의 개수와 같다.

(2) $x>a$에서 $f(x)>0$이 성립함을 증명할 때, $x>a$에서 $f(x)$의 최솟값이 0보다 크다는 것을 보인다.

⑩ 속도와 가속도

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치를 $x=f(t)$라고 할 때, 시각 t에서의 속도 v와 가속도 a는 다음과 같다.

(1) $v=\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$　　(2) $a=\dfrac{dv}{dt}=v'(t)$

| 용어와 기호 | 증분, 평균변화율, 미분가능, 순간변화율, 미분계수, 도함수, 롤의 정리, 평균값 정리, 증가, 감소, 극대, 극댓값, 극소, 극솟값, 극값, Δx, Δy, $f'(x)$, y', $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d}{dx}f(x)$

수행 과제

● 수행 과제 의도

삼차함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프를 이용하여 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 이해하기 위한 것이다.

과제 1 _풀이

㉠ **0개**　㉡ **2개**　㉢ **1개**

과제 2 _풀이

㉠ $f'(x)=0$을 만족시키는 x값의 좌우에서 부호 변화가 없으며, 극댓값, 극솟값이 존재하지 않는다.

㉡ $f'(x)=0$을 만족시키는 x값의 좌우에서 $+$에서 $-$, $-$에서 $+$로 부호 변화가 있으며, $+$에서 $-$로 변하는 x값에서 극댓값이 **1**개, $-$에서 $+$로 변하는 x값에서 극솟값이 **1**개 존재한다.

㉢ $f'(x)=0$을 만족시키는 x값의 좌우에서 부호 변화가 없으며, 극댓값, 극솟값이 존재하지 않는다.

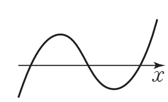
과제 3 _풀이 차례로 ㉡, ㉢, ㉠

읽/기/자/료

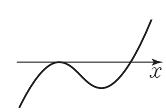
삼차함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\,(a>0)$의 그래프와 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 근의 개수

(1) 극값을 갖는 경우

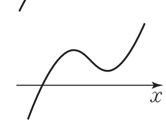
(ⅰ) 극댓값과 극솟값의 부호가 다를 때 서로 다른 세 실근을 가진다.



(ⅱ) 극댓값 또는 극솟값이 0일 때 중근과 다른 하나의 실근을 가진다.

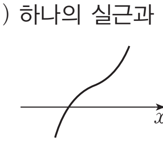


(ⅲ) 극댓값과 극솟값의 부호가 같을 때 하나의 실근과 두 허근을 가진다.

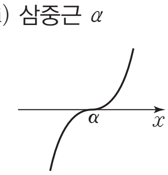


(2) 극값을 갖지 않는 경우

(ⅰ) 하나의 실근과 두 허근



(ⅱ) 삼중근 α



교과서 136 쪽

대/단/원 평가 문제

Ⅲ. 다항함수의 미분법

선택형

1 함수 $f(x)=x^2-x$에 대하여 x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 평균변화율은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2 함수 $f(x)$에서 $f'(1)=3$일 때, $\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}$의 값은?

① 0 ② 2 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

3 함수 $f(x)=x^2-3x+2$의 그래프 위의 점 (a, b)에서 접선의 기울기가 5일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 10 ② 6 ③ 2 ④ -2 ⑤ -6

4 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x<a) \\ 2x+b & (x\geq a) \end{cases}$가 $x=a$에서 미분가능하도록 하는 두 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

5 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)=(x^2+x)g(x)$이고, $f(1)=4$, $g'(1)=2$일 때, $f'(1)$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

6 두 곡선 $y=-2x^2-5x$와 $y=ax^3+bx$가 점 $(1, -7)$에서 공통인 접선을 가질 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

7 닫힌 구간 $[0, 3]$에서 정의된 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+1$이 있다. 열린 구간 $(0, 3)$에 속하는 서로 다른 임의의 두 수 a, b에 대하여 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=k$를 만족시키는 실수 k값의 범위는?

① $-3\leq k<2$ ② $-3\leq k\leq 1$ ③ $-2\leq k<2$ ④ $-1\leq k<3$ ⑤ $0<k\leq 4$

8 함수 $f(x)=x^3+kx^2-8x+4$가 구간 $(-2, 1)$에서 감소하기 위한 실수 k의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

대/단/원 평가 문제

1

목표| 평균변화율을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\frac{\varDelta y}{\varDelta x}=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{(3^2-3)-(1^2-1)}{2}=3$

답 ③

2

목표| 미분계수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}(x+1)$

$=f'(1)\times 2$

$=3\times 2=6$

답 ④

3

목표| 도함수를 이용하여 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| $f(x)=x^2-3x+2$로 놓으면

$f'(x)=2x-3$

접점의 x좌표를 a라고 하면 접선의 기울기가 5이므로

$f'(a)=2a-3=5$에서 $a=4$

이때, $f(4)=6$이므로 $b=6$

따라서 $a+b=10$

답 ①

4

목표| 미분가능성과 연속성을 이용하여 미정계수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $f'(x)=\begin{cases} 2x & (x<a) \\ 2 & (x>a) \end{cases}$

$x=a$에서 미분가능하므로 $x=a$에서 연속이다.

즉 $a^2=2a+b$ ⋯①, $2a=2$ ⋯②

①, ②에서 $a=1$, $b=-1$

따라서 $a-b=2$

답 ⑤

5

목표| 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있게 한다.

풀이| $f(1)=2g(1)$, $f(1)=4$이므로

$g(1)=2$

$f'(x)=(2x+1)g(x)+(x^2+x)g'(x)$에서

$f'(1)=3g(1)+2g'(1)=3\times 2+2\times 2=10$

답 ⑤

6

목표| 도함수를 이용하여 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| $f(x)=-2x^2-5x$라 하면 $f'(x)=-4x-5$

점 $(1, -7)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=-4\times 1-5=-9$

따라서 점 $(1, -7)$에서의 접선의 방정식은

$y-(-7)=-9(x-1)$, $y=-9x+2$

$g(x)=ax^3+bx$라 하면 $g'(x)=3ax^2+b$

$f(x)$와 점 $(1, -7)$에서 공통 접선을 가지므로

$g'(1)=3a+b=-9$, $g(1)=a+b=-7$

에서 $a=-1$, $b=-6$

$\therefore ab=(-1)\times(-6)=6$

답 ③

7

목표| 평균값 정리를 활용할 수 있게 한다.

풀이| 평균값 정리에 의하여

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$

$(a<c<b$ 또는 $b<c<a)$인 c가 존재한다.

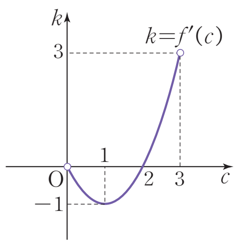
$0\le a<c<b\le 3$ 또는 $0\le b<c<a\le 3$이므로

$0<c<3$

$f'(x)=x^2-2x$에서

$f'(c)=(c-1)^2-1$

따라서 $k=f'(c)$라고 하면 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$0<c<3$이므로 $\quad -1\le k<3$

답 ④

8

목표| 도함수를 이용하여 함수의 증가, 감소 구간을 구할 수 있게 한다.

풀이| $f'(x)=3x^2+2kx-8$이 구간 $(-2,\ 1)$에서 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

$f'(-2)=12-4k-8\le 0,\ 4k\ge 4,\ k\ge 1,$

$f'(1)=3+2k-8\le 0,\ 2k\le 5,\ k\le \dfrac{5}{2}$

이므로 $\quad 1\le k\le \dfrac{5}{2}$

따라서 실수 k의 최댓값은 $\dfrac{5}{2}$, 최솟값은 1이므로 그 합은 $\dfrac{7}{2}$

답 ④

9

목표| 도함수를 이용하여 극값의 존재 유무를 판단할 수 있게 한다.

풀이| 삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않도록 하기 위해서는 도함수 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

$f'(x)=3x^2+2kx-2k$이므로 판별식

$\dfrac{D}{4}=k^2+6k\le 0,\ k^2+6k\le 0,\ -6\le k\le 0$

따라서 함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않도록 하는 정수 k의 개수는 7이다.

답 ④

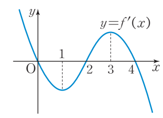
교과서 137 쪽

[해답 p.207]

9 함수 $f(x)=x^3+kx^2-2kx+3$이 극값을 갖지 않도록 하는 정수 k의 개수는?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

10 다음 그림은 함수 $y=f'(x)$의 그래프를 나타낸 것이다. 구간 $[0,\ 4]$에서 함수 $y=f(x)$는 $x=a$일 때 최솟값을 가질 때, a의 값은?



① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

11 방정식 $x^3-3x=k$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 k값의 범위는?

① $0<k<2$ ② $0<k<3$
③ $-2<k<0$ ④ $-2<k<2$
⑤ $-3<k<0$

12 지상 25 m의 높이에서 초속 20 m로 똑바로 위로 던진 물체의 t초 후의 높이를 h m라고 하면 $h=25+20t-5t^2$인 관계가 성립한다. 이 물체가 최고 지점에 도달했을 때, 지면으로부터의 높이는 몇 m인가?

① 30 m ② 35 m ③ 40 m
④ 45 m ⑤ 50 m

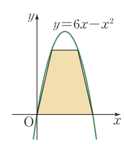
서답형

13 이차함수 $f(x)$가 $f(0)=4,\ f'(0)=2,\ f'(1)=8$을 만족시킬 때, 함수 $f(x)$를 구하여라.

14 곡선 $y=x^3-3x^2+2x$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하였더니 직선 $y=-x+3$에 접하였다. 상수 $m,\ n$에 대하여 $m+n$의 값을 구하여라.

|서|술|형|

15 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=6x-x^2$과 x축으로 둘러싸인 부분에 내접하는 사다리꼴의 넓이의 최댓값을 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.



|서|술|형|

16 $x>2$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^3-3x^2>a$가 항상 성립하도록 하는 실수 a값의 범위를 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

10

목표| 도함수를 이용하여 최솟값을 구할 수 있게 한다.

풀이| 함수 $f'(x)$의 그래프에서

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

따라서 $x=0$에서 극대, $x=2$에서 극소, $x=4$에서 극대를 갖는다.

즉 $x=2$에서 함수 $f(x)$는 최솟값을 가지므로 $a=2$이다.

답 ③

11

목표| 도함수를 방정식에 활용할 수 있게 한다.

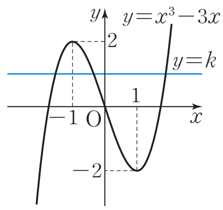
풀이| $f(x)=x^3-3x$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=1$

$f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들고, 그래프를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2 (극대)	$\searrow$	-2 (극소)	$\nearrow$



주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=x^3-3x$와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같으므로 서로 다른 세 개의 실근을 가지기 위한 k값의 범위는 $-2<k<2$ 답 ④

12

목표| 도함수를 실생활에 활용할 수 있게 한다.

풀이| 물체가 최고점에 도달했을 때 속도는 0이므로
속도 v는 $v=h'=20-10t=0$에서 $t=2$
$t=2$일 때 최고 지점의 높이는
$h=25+20\times2-5\times2^2=45(\mathrm{m})$ 답 ④

13

목표| 미분계수를 이용하여 함수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면
$f(0)=c=4$
$f'(x)=2ax+b$에서 $f'(0)=b=2$
$f'(1)=2a+b=8$에서 $a=3$
따라서 $f(x)=3x^2+2x+4$ 답 $f(x)=3x^2+2x+4$

14

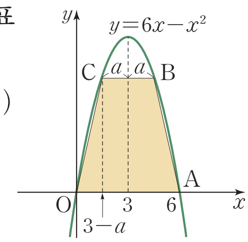
목표| 도함수를 이용하여 접선의 방정식을 구할 수 있게 한다.

풀이| 직선 $y=-x+3$을 평행이동하면
곡선 $y=x^3-3x^2+2x$에 접하고 그때의 기울기는 -1이다.
따라서 $f(x)=x^3-3x^2+2x$라고 하면
$f'(x)=3x^2-6x+2$
이때 접점의 x좌표를 a라고 하면
$f'(a)=3a^2-6a+2=-1$, $3(a-1)^2=0$, $a=1$
이므로 접점의 좌표는 $(1, 0)$
위 점을 x축으로 m만큼, y축으로 n만큼 평행이동시킨 점 $(1+m, n)$을 $y=-x+3$에 대입하면
$n=-(1+m)+3$, $m+n=2$ 답 2

15

목표| 도함수를 이용하여 최댓값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $6x-x^2=0$에서 $x(x-6)=0$이므로
$x=0$ 또는 $x=6$, $\mathrm{A}(6, 0)$
오른쪽 그림과 같이 점 C의 좌표를 $\mathrm{C}(3-a, -a^2+9)$ $(0<a<3)$로 놓고, 사다리꼴의 넓이를 $S(a)$라고 하면



$S(a)=\frac{1}{2}(2a+6)(-a^2+9)$
$S(a)=-a^3-3a^2+9a+27$
$S'(a)=-3a^2-6a+9$
$=-3(a+3)(a-1)$
$S'(a)=0$에서 $a=1$ $(0<a<3)$
$a=1$에서 극대이면서 최댓값을 가진다.
따라서 넓이의 최댓값은 32이다. 답 32

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소	배점
해결 과정	곡선이 x축과 만나는 점의 좌표 구하기	20%
	사다리꼴의 넓이 S를 미지수로 나타내기	40%
	S를 미분하여 극값 구하기	20%
	극대이면서 최댓값 구하기	10%
답 구하기	넓이의 최댓값 말하기	10%

16

목표| 도함수를 부등식에 활용할 수 있게 한다.

풀이| $f(x)=x^3-3x^2-a$라고 하면
$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$
$f(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-a$	$\searrow$	$-a-4$	$\nearrow$

$x>2$인 모든 실수에서 (최솟값)>0이므로
$f(2)=-a-4\geq0$
따라서 $a\leq-4$ 답 $a\leq-4$

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소	배점
해결 과정	$f(x)$의 도함수에서 극값 구하기	30%
	$f(x)$의 증가와 감소 알아보기	30%
	조건을 만족시키는 경우를 식으로 나타내기	30%
답 구하기	a값의 범위 구하기	10%

교과서 138 쪽

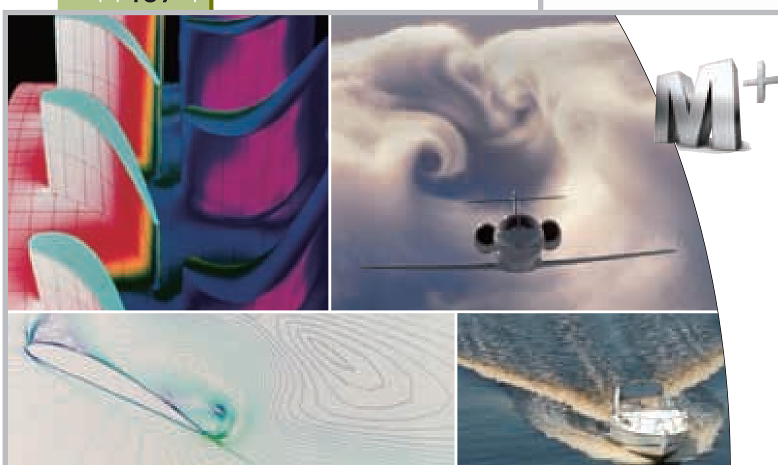
미분은 실생활에서 어떻게 활용되는가?

지구 온난화로 인한 기후의 변화, 물가의 변동 상태, 인구의 변화 등 많은 현상들이 시간에 따른 변화의 모습을 띠고 있다. 이러한 변화 속에 내재된 일정한 질서와 패턴들을 연구함으로써 그 흐름을 예측할 수 있다. 물체가 어떻게 운동하는가를 수학적으로 나타내려는 노력 속에서 발명된 미분은 변화하는 대상을 수학적으로 분석하게 해주는 유용한 도구이다.

미분은 열역학, 유체역학, 건축학, 전자기학을 비롯한 대부분의 공학 분야와 물리학, 화학, 경제학, 경영학 등 다양한 분야의 학문을 연구하는 중요한 도구가 된다.

예를 들어 열전도 현상, 진동 현상, 바이러스 증식 등에서 일어나는 여러 가지 현상은 미분을 이용하여 설명할 수 있으며 환율, 금리, 주가와 같은 금융 시장의 변동을 분석하고 예측할 때에도 미분이 유용하게 활용된다. 뿐만 아니라 핵물리학에서의 방사성 물질이 붕괴되는 비율의 계산, 화학에서의 물질의 반응율과 압축률, 생물학에서의 혈액의 속도 등을 계산하는 데에도 미분이 유용하게 활용된다. 우리가 매일 접하는 일기 예보에서 핵심적인 역할을 하는 것 역시 미분이다.

교과서 139 쪽



배가 잔잔한 호수를 천천히 가로질러 갈 때 배의 뒤편으로 삼각형 모양으로 물결이 퍼져 나가는 것을 볼 수 있다. 또 비행기가 하늘을 날고 있을 때 비행기가 지나간 자리에는 불규칙한 공기의 흐름이 남는다.

배의 몸통 주위를 흐르는 물이나 비행기 날개 주위로 흐르는 공기의 흐름을 설명하는 방정식 중 해결이 어려운 것으로 나비에–스토크스 방정식이 널리 알려져 있다. 그러나 19세기에 만들어진 이 방정식에 대해서 알고 있는 것은 그 활용 범위에 비해 너무나 미미하다. 컴퓨터를 이용하여 특정 형태의 나비에–스토크스 방정식들에 대한 근사적인 해를 구하는 것은 가능하지만 3차원 공간에서 나비에–스토크스 방정식을 만족시키는 함수가 항상 존재하는지 아직까지도 밝혀내지 못하였다.

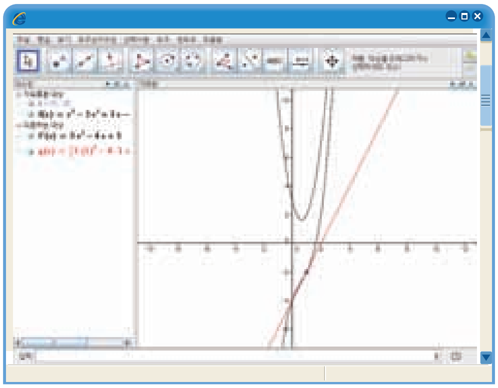
2000년 미국 매사추세츠 주 케임브리지에 있는 클레이 수학 연구소는 나비에–스토크스 방정식을 7개의 밀레니엄 문제(Millennium Prize Problems) 중의 하나로 지정하고, 이를 해결하거나 반례를 찾아낸 사람에게 미화 백만 달러를 제공하겠다고 발표하였다.

나비에–스토크스 방정식 속에 숨겨진 비밀을 풀기 위한 도전에 동참해 보는 것은 어떨까?

수 학 실 생 활

과제 _풀이

(1)



M+ Engineering

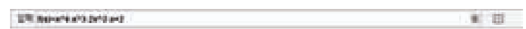
수 학 ✚ 공 학

공학적 도구를 활용한 접선의 작도

기하 작도 소프트웨어를 이용하면 함수의 그래프와 그 접선을 쉽게 그릴 수 있다.
곡선 $f(x)=x^4-x^3-2x^2-x+2$ 위의 한 점에서의 접선을 그려 보자.

1\ 함수 $f(x)=x^4-x^3-2x^2-x+2$의 그래프를 그리고, 접점 A를 선택하여 보자.

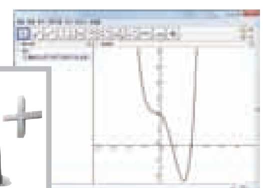
(1) 다음과 같이 명령어 입력 상자에 '$f(x)=x^4-x^3-2x^2-x+2$'를 입력하고, Enter키를 누른다.



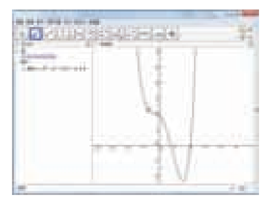
(2) (1)에서 입력한 함수의 식은 〈그림 1〉과 같이 대수창에 나타나고, 함수의 그래프는 기하창에 나타난다.

(3) 아이콘을 클릭하고, [새로운 점]을 선택한다.

(4) 기하창에서 그래프 위의 한 점을 클릭하면 〈그림 2〉와 같이 기하창에 점 A가 작도되고, 대수창에 점 A의 좌표가 나타난다.



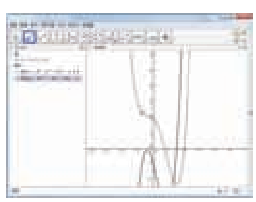
〈그림 1〉



〈그림 2〉

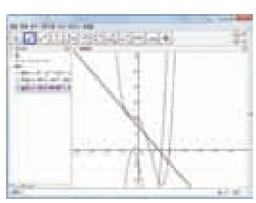
2\ 함수 $f(x)=x^4-x^3-2x^2-x+2$의 도함수를 구하여 보자.

명령어 입력 상자에 '$f'(x)=$미분$[f(x)]$' 또는 '$f'(x)=$derivative$[f(x)]$'를 입력하고 Enter키를 누르면 오른쪽 그림과 같이 대수창에 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 식이 나타나고, 기하창에 그 그래프가 나타난다.

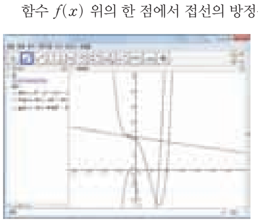


3\ 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선을 그려 보자.

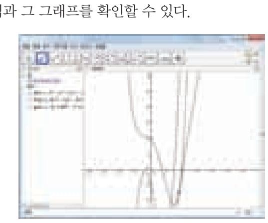
(1) 명령어 입력 상자에 '$g(x)=f'(x(\mathrm{A}))(x-x(\mathrm{A}))+y(\mathrm{A})$'를 입력하고 Enter키를 누르면 오른쪽 그림과 같이 대수창에 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선의 식 $g(x)$가 나타나고, 기하창에 접선의 그래프가 나타난다.



(2) 기하창의 점 A를 클릭한 채로 그래프를 따라 움직여 보면 〈그림 3〉, 〈그림 4〉와 같이 함수 $f(x)$ 위의 한 점에서 접선의 방정식과 그 그래프를 확인할 수 있다.



〈그림 3〉



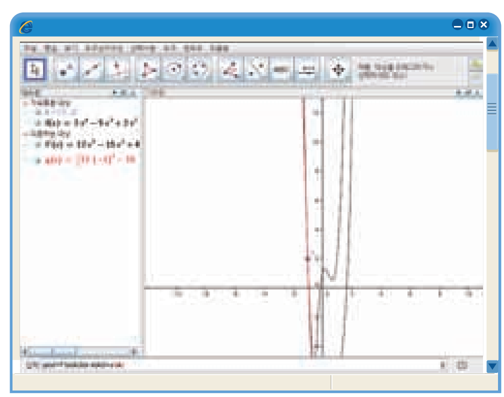
〈그림 4〉

수 학 ✚ 공 학

| 과 제 | 다음 곡선 위의 점 A에서의 접선을 기하 작도 소프트웨어를 이용하여 그려 보자.

(1) $f(x)=x^3-2x^2+3x-4$ A$(1, -2)$
(2) $f(x)=3x^4-5x^3+2x^2+x-7$ A$(-1, 2)$

(2)



다리 위의 하중을 견디기 위해서는

교각이 받는 힘의 크기를 계산해야 한다.

다항함수의 적분법

|준|비|학|습|

수학 Ⅱ 수열의 합

1 다음 수열의 합을 구하여라.

(1) $\sum_{k=1}^{n} k$ $\quad \frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\sum_{k=1}^{n} k^2$ $\quad \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

미적분 Ⅰ 다항함수의 미분법

2 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $y=4$ $\quad y'=0$

(2) $y=2x-3$ $\quad y'=2$

(3) $y=x^2+5x-2$ $\quad y'=2x+5$

(4) $y=x^3-x^2$ $\quad y'=3x^2-2x$

미적분 Ⅰ 도함수의 활용

3 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=t^3-2t^2+3t-1$로 주어질 때, $t=3$에서의 속도와 가속도를 각각 구하여라.

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-4t+3,\ a=\frac{dx}{dt}=6t-4$

$t=3$일 때의 속도와 가속도는

$v=3\times3^2-4\times3+3=18,\ a=6\times3-4=14$

단원의 지도 목표

1. 부정적분과 정적분

① 부정적분의 뜻을 알게 한다.
② 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 알고, 다항함수의 부정적분을 구할 수 있게 한다.
③ 구분구적법을 이해하고, 이를 이용하여 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있게 한다.
④ 정적분의 뜻을 알게 한다.
⑤ 부정적분과 정적분의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있게 한다.

2. 정적분의 활용

① 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있게 한다.
② 정적분을 활용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

① 적분에 필요한 공식은 미분법의 공식에서 유도할 수 있음을 보인다.
② 속도와 거리에 대한 문제는 직선 운동에 한하여 다룬다.
③ 피적분함수, 원시함수, 위끝, 아래끝 용어는 교수 · 학습 상황에서 다루어질 수 있다.

교수 · 학습의 계열

선수 학습

[수학 I]
- 이차방정식
- 여러 가지 방정식

[수학 II]
- 수열

[미적분 I]
- 수열의 극한
- 다항함수의 미분법

본 단원

1. 부정적분과 정적분
   - 부정적분
   - 구분구적법
   - 정적분
   - 정적분의 계산

2. 정적분의 활용
   - 넓이
   - 속도와 거리

후속 학습

[확률과 통계]
- 확률분포
- 통계적 추정

단원의 차시별 지도 계획

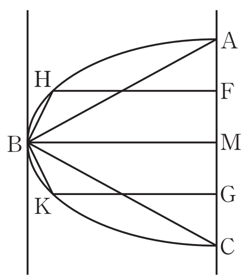
중단원	소단원	차시	교과서(쪽)	지도 내용	용어와 기호
단원의 개관		1~3	142~143	• 단원의 개관 • 준비 학습	
1. 부정적분과 정적분	중단원 도입		144	• 달의 분화구에는 얼마나 많은 물이 존재할까?	
	01 부정적분		145~149	• 부정적분의 정의 • 적분상수 • $y=x^n$의 부정적분 • 부정적분의 성질	부정적분 $\int f(x)dx$ 적분상수
	02 구분구적법	4~5	150~153	• 구분구적법 • 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이, 부피	구분구적법
	03 정적분	6~10	154~161	• 정적분의 정의 • $\int_a^b f(x)dx$ • 정적분과 미분의 관계 • 미적분의 기본 정리	정적분 $\int_a^b f(x)dx$ $\left[F(x)\right]_a^b$ 미적분의 기본 정리
	04 정적분의 계산	11~13	162~166	• 정적분의 성질 [1] • 정적분의 성질 [2]	
	수준별 학습	14	167~169	• 중단원 확인 학습 문제	
2. 정적분의 활용	중단원 도입	15~18	170	• 국민의 소득 분배를 측정하다.	
	01 넓이		171~175	• 곡선과 x축 사이의 넓이 • 두 곡선 사이의 넓이	
	02 속도와 거리	19~20	176~178	• 속도와 거리	
	수준별 학습	21	179~181	• 중단원 확인 학습 문제	
단원 마무리		22	182~187	• 수행 과제 • 대단원 학습 내용 정리 • 대단원 평가 문제 • 수학 플러스	

단원의 이론적 배경

1. 아르키메데스의 적분

적분법의 개념이 생긴 것은 미분법의 개념과는 관계 없이 훨씬 오래 전인 그리스 시대로 거슬러 올라간다.

다각형의 넓이는 삼각형으로 분할하면 구할 수 있지만 곡선으로 둘러싸인 도형을 삼각형으로 분할하는 것은 불가능하다. 아르키메데스는 포물선과 직선으로 둘러싸인 넓이를 다음과 같이 구했다.



오른쪽 그림에서 현 $\overline{AC}$의 중점 M을 지나고 포물선의 축과 평행한 직선이 포물선과 만나는 점을 B라 하면 B에서 포물선의 접선은 $\overline{AC}$와 평행하다. 또 $\overline{AM}$, $\overline{CM}$의 중점을 각각 F, G라 하고, 두 점 F, G를 지나고 포물선의 축에 평행인 직선을 긋고 포물선과 만나는 점을 H, K라고 하자. 그러면 $\triangle ABC=4(\triangle AHB+\triangle BKC)$이므로 다각형 AHBKC의 넓이는 다음과 같다.

$$(\text{다각형 AHBKC})=\triangle ABC+\triangle AHB+\triangle BKC$$
$$=\triangle ABC+\frac{1}{4}\triangle ABC$$

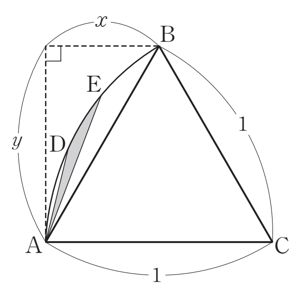
이와 같은 방법을 계속하면 구하는 넓이 S는

$$S=\triangle ABC+\frac{1}{4}\triangle ABC+\frac{1}{4^2}\triangle ABC+\cdots$$
$$=\triangle ABC\left\{\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}\right\}$$
$$=\frac{4}{3}\triangle ABC\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$$
$$=\frac{4}{3}\triangle ABC-\frac{1}{3\cdot 4^{n-1}}\triangle ABC$$

임을 증명하고 $S=\frac{4}{3}\triangle ABC$를 유도했다.

2. 라이프니츠의 적분

라이프니츠는 독일의 라이프치히 대학의 윤리학 교수이며 법률 고문인 법률가 가문에서 태어났다. 그는 6살에 부친을 잃고 편모 슬하에서 자라났다. 15살에는 라이프찌히 대학 법과에 입학하였고 철학에 흥미를 느껴 스콜라 철학과 데카르트 철학을 비교하면서 공부하였으며 1672년에 그의 나이 25살, 그는 파리에 가서 생활하게 되었다. 이때부터 그는 수학에 대한 연구를 적극적으로 하게 되었다. 독학으로 수학에 통달한 그는 1673년에 2개월간 영국을 방문하여 영국의 수학자와 물리학자를 만나 구적법에 대한 이야기를 듣고 급수에 대한 연구를 시작하게 되었는데 그 대표적인 것이 사분원의 넓이의 계산이다.



오른쪽 그림에서 무한소 삼각형 ADE를 만들고 이것으로부터 활꼴 ADEB의 넓이를 S라고 할 때,

$$S=\frac{1}{2}xy-\int_0^1\frac{y^2}{1+y^2}dy$$

피적분함수를 $\frac{y^2}{1+y^2}=y^2-y^4+y^6-\cdots$으로 전개하여 항별로 적분하면

$$S=\frac{1}{2}xy-\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5}-\frac{y^7}{7}+\cdots$$

이 된다. 이때, $x=y$라 하고 삼각형 ABC의 넓이를 더하여 사분원의 넓이를 다음과 같이 구하였다.

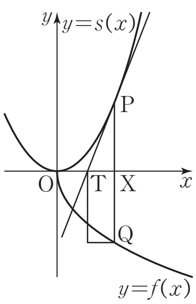
$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\cdots$$

그 후, 1675년에는 뉴턴이 알고 있었던 미적분의 결과를 재발견하게 되었고 1684년에는 미분법에 대한 논문을 발표하였다. 이 논문에서 미분과 적분이 역연산 관계에 있다는 것을 설명하고 부정적분을 정적분과 분리시켜 적분상수까지도 생각하기에 이르렀다.

1686년에 발표한 논문 '심오한 수학－불가분량과 무한소량의 해석에 대하여'에서 논문에서 처음으로 적분 기호 $\int$이 인쇄되었으며 라이프니츠는 자신의 적분법을 역접선의 방법이라고 불렀다.

3. 뉴턴의 적분

영국의 수학자 배로는 다음과 같은 정리를 증명하였다고 한다.



오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$ 주어지고 그 곡선 위에 각 점까지 곡선과 x축 사이의 넓이를 나타내는 곡선 $y=s(x)$가 있다고 하자. 여기서 $\overline{\mathrm{TX}}\cdot\overline{\mathrm{XQ}}=\overline{\mathrm{PX}}$가 되도록 잡으면 직선 TP는 접선이 된다. 이 정리를 다음과 같이 기호로 나타낼 수 있다.

접선의 기울기를 $s'(x)$라고 하면

$$s'(x)=\frac{\overline{\mathrm{PX}}}{\overline{\mathrm{TX}}}=\frac{\overline{\mathrm{TX}}\cdot\overline{\mathrm{XQ}}}{\overline{\mathrm{TX}}}=\overline{\mathrm{XQ}}$$

즉, 넓이의 변화율이 함숫값이 된다.

뉴턴은 그 이전의 연구 결과로부터 곡선 아래의 넓이가 작은 사각형들의 합이라는 것을 알고 있었고 넓이의 변화율이 바로 좌표의 길이라고 생각했다. 이것을 기호로 나타내면 $\frac{dS(x)}{dx}=f(x)$가 된다. 그러므로 넓이를 구하는 문제는 부정적분을 구하는 문제로 귀결된다.

뉴턴은 대수식으로 주어진 다양한 곡선의 넓이를 나타내는 대수식의 표를 만들었고, 이를 통하여 넓이와 관련된 문제를 해결하였다. 예를 들면 그는 곡선 $f(x)=ax^{\frac{m}{n}}$ 아래의 넓이 $S(x)$가

$$S(x)=\frac{n}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}}$$

이 됨을 보였다.

4. 코시의 적분

뉴턴과 라이프니츠 시대까지의 적분은 도형, 물리적인 현상에 대한 직관적 방법이었다. 그러나 코시는 극한의 수학적인 정의에 의하여 적분의 개념을 정의하였으며, 적분을 기하학적 역학적인 보조 수단에서 독립시켰다.

그는 유계인 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속함수 $f(x)$에 대한 구간 $[a,\ b]$를 $n-1$개의 점 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1}$의 n개 소구간으로 분할한다. 각 소구간 $[x_{i-1},\ x_i]$에 포함되는 임의의 한 점 ξ_i를 잡아서

$$S=f(\xi_1)(x_1-x_0)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+\cdots$$
$$+f(\xi_n)(x_n-x_{n-1})$$
$$=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i(\Delta x_i=x_i-x_{i-1})$$

을 취할 때, Δx_i 중에서 가장 큰 값이 0에 수렴하도록 분점의 수를 증가시키면 S는 일정한 값에 수렴한다는 것을 증명하였다. 이때 이 극한을 $\int_a^b f(x)dx$로 쓰고 이것을 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)$의 정적분이라고 하였다. 그리고 $f(x)\geq 0$일 때, 정적분을 곡선 $y=f(x)$와 x축, 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이라고 정의하였다.

5. 리만 적분

코시는 불연속점이 유한개인 함수에 대하여 적분을 확장하였다. 그러나 $f(x)$의 불연속점이 무한히 많고, 또 그것이 구간 $[a,\ b]$ 위에 조밀하게 분포되었을 때는 코시의 방법으로는 적분이 불가능하다.

반면에 리만은 1854년 발표한 논문에서 적분을 몇 개의 불연속점을 갖는 유계함수에서 출발할 수 있는 방법을 생각하였다.

차시별 교수 · 학습 과정안 (예시)

<table>
<tr><td colspan="2">대단원</td><td>Ⅳ. 다항함수의 적분법</td><td>쪽수</td><td>교과서 142~146쪽</td></tr>
<tr><td colspan="2">소단원</td><td>1. 부정적분과 정적분 01 부정적분</td><td>차시</td><td>1/22</td></tr>
<tr><td colspan="2">학습 목표</td><td colspan="3">부정적분의 뜻을 안다.</td></tr>
<tr><td>단계</td><td>학습 과정</td><td colspan="2">교수 · 학습 활동</td><td>교수 · 학습상의 유의점</td></tr>
<tr><td>도입</td><td>선수 학습 확인

동기 유발

학습 목표 제시</td><td colspan="2">준비 학습을 이용하여 이번 단원의 학습에 필요한 기초 개념을 간단히 확인, 점검한다.
중단원 도입 글을 읽고 단원 과제를 발문하여 이번 중단원을 학습하면서 이 과제를 해결할 수 있음을 암시한다.
이번 차시의 학습 목표를 제시한다.
• 부정적분의 뜻을 안다.</td><td>모둠 학습을 위한 소집단을 사전에 편성한다.</td></tr>
<tr><td>전개</td><td>탐구 활동

개념 학습

문제 해결</td><td colspan="2">생각 열기를 읽고, 탐구 활동을 모둠별로 해결하도록 한다.
탐구 활동 결과를 발표하게 하고, 보충 설명을 한다.
학습 내용 설명
부정적분
$F'(x)=f(x)$일 때,
$\int f(x)dx=F(x)+C$ (단, C는 적분상수)
문제 1, 2번을 풀게 한다.
정답을 확인하고, 보충 설명을 한다.</td><td></td></tr>
<tr><td>정리</td><td>학습 내용 정리
차시 예고</td><td colspan="2">본시의 학습 내용을 정리한다.
다음 차시를 예고한다.
• $y=x^n$의 부정적분을 구할 수 있다.</td><td></td></tr>
</table>

차시별 교수 · 학습 과정안(예시)

대단원		Ⅳ. 다항함수의 적분법	쪽수	교과서 147쪽
소단원		1. 부정적분과 정적분　01 부정적분	차시	2/22
학습 목표		**$y=x^n$의 부정적분을 구할 수 있다.**		
단계	학습 과정	교수 · 학습 활동		교수 · 학습상의 유의점
도입	선수 학습 확인 동기 유발 학습 목표 제시	◎ 이전 차시에 학습한 내용을 간단히 확인, 점검한다. ◎ $y=x^n$의 미분의 반대 방향을 설명한다. ◎ 이번 차시의 학습 목표를 제시한다. • $y=x^n$의 부정적분을 구할 수 있다.		모둠 학습을 위한 소집단을 사전에 편성한다.
전개	탐구 활동 개념 학습 문제 해결	◎ 탐구 활동을 모둠별로 해결하도록 한다. ◎ 탐구 활동 결과를 발표하게 하고, 보충 설명을 한다. ◎ 학습 내용 설명 **$y=x^n$의 부정적분** n이 0 또는 양의 정수일 때, $\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$ (단, C는 적분상수) ◎ 문제 3, 4번을 풀게 한다. 정답을 확인하고, 보충 설명을 한다.		
정리	학습 내용 정리 차시 예고	◎ 본시의 학습 내용을 정리한다. ◎ 다음 차시를 예고한다. • 부정적분의 성질을 이해한다.		

1 부정적분과 정적분

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

① 부정적분의 뜻을 알게 한다.

② 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 알고 다항 함수의 부정적분을 구할 수 있게 한다.

③ 구분구적법을 이해하고, 이를 이용하여 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있게 한다.

④ 정적분의 뜻을 알게 한다.

⑤ 부정적분과 정적분의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있게 한다.

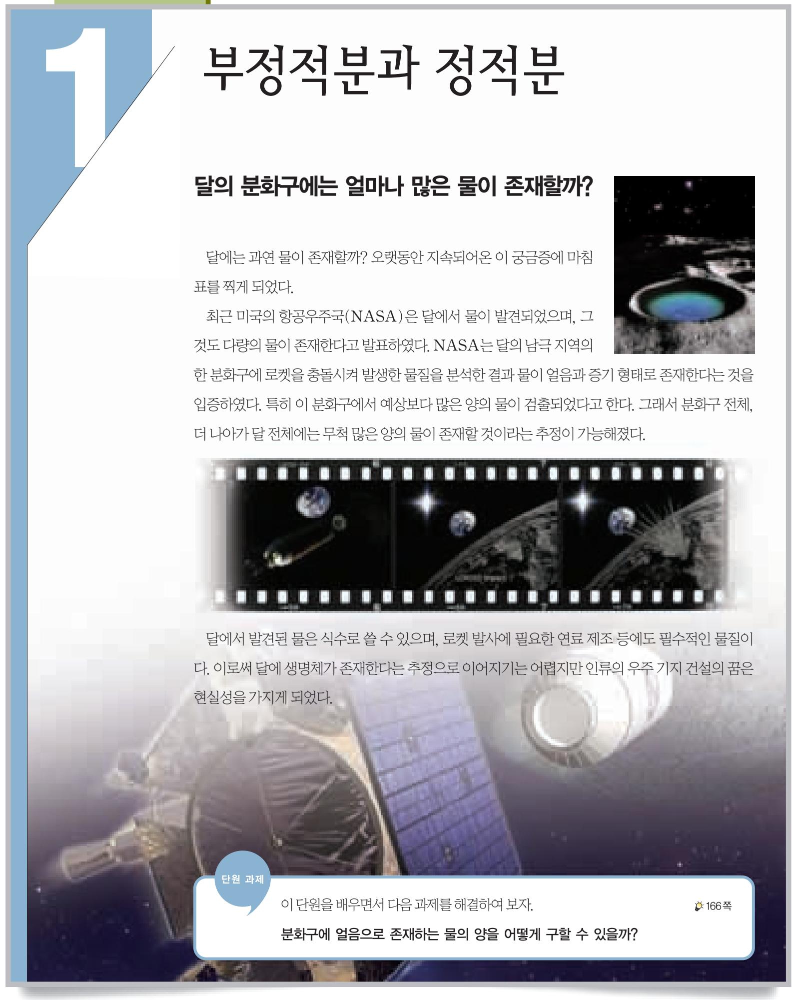
중단원의 구성

소단원명	지도 내용
01 부정적분	부정적분의 정의
	적분상수
	$y=x^n$의 부정적분
	부정적분의 성질
02 구분구적법	구분구적법
	곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이, 부피
03 정적분	정적분의 정의
	$\int_a^b f(x)dx$
	정적분과 미분의 관계
	미적분의 기본 정리
04 정적분의 계산	정적분의 성질 [1]
	정적분의 성질 [2]

들어가면서 적분법은 넓이, 부피를 구하는 문제에서부터 시작되었다고 한다. 변화하는 양을 수학의 대상으로 보고 그 변화하는 모습이 어떻게 이루어지고 있는가를 알아내는 것이 미분법이라면, 적분법은 변화의 결과로 어떻게 되었는가를 알아내기 위한 방법이라고 할 수 있다. 따라서 구분구적법을 통해 정적분이 먼저 연구되었으며, 정적분과 부정적분 사이의 관계인 미적분의 기본 정리는 미적분의 연구와 함께 나중에 밝혀진 일이다.

이 단원에서는 미분법의 역연산으로서의 부정적분을 구할 수 있게 하고, 부정적분의 성질을 이용하여 다양한 함수의 부정적분을 구할 수 있게 한다.

교과서 144 쪽



1 부정적분과 정적분

달의 분화구에는 얼마나 많은 물이 존재할까?

달에는 과연 물이 존재할까? 오랫동안 지속되어온 이 궁금증에 마침표를 찍게 되었다.

최근 미국의 항공우주국(NASA)은 달에서 물이 발견되었으며, 그것도 다량의 물이 존재한다고 발표하였다. NASA는 달의 남극 지역의 한 분화구에 로켓을 충돌시켜 발생한 물질을 분석한 결과 물이 얼음과 증기 형태로 존재한다는 것을 입증하였다. 특히 이 분화구에서 예상보다 많은 양의 물이 검출되었다고 한다. 그래서 분화구 전체, 더 나아가 달 전체에는 무척 많은 양의 물이 존재할 것이라는 추정이 가능해졌다.

달에서 발견된 물은 식수로 쓸 수 있으며, 로켓 발사에 필요한 연료 제조 등에도 필수적인 물질이다. 이로써 달에 생명체가 존재한다는 추정으로 이어지기는 어렵지만 인류의 우주 기지 건설의 꿈은 현실성을 가지게 되었다.

단원 과제

이 단원을 배우면서 다음 과제를 해결하여 보자. 166쪽

분화구에 얼음으로 존재하는 물의 양을 어떻게 구할 수 있을까?

성취 기준과 성취 수준

성취 기준	성취 수준	
1. 부정적분	상	함수의 부정적분의 성질을 증명할 수 있다.
	중	함수의 부정적분을 구할 수 있다.
	하	함수의 부정적분의 뜻을 이해할 수 있다.
2. 구분구적법	상	다양한 형태의 영역의 넓이와 입체의 부피를 구할 수 있다.
	중	곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구할 수 있다.
	하	구분구적법의 뜻을 이해할 수 있다.
3. 정적분	상	함수의 그래프를 이용하여 다양한 문제를 해결할 수 있다.
	중	미적분의 기본 정리를 이해할 수 있다.
	하	정적분의 뜻을 이해할 수 있다.
4. 정적분의 계산	상	정적분을 이용하여 다양한 문제를 해결할 수 있다.
	중	정적분의 성질을 이해할 수 있다.
	하	간단한 정적분을 구할 수 있다.

교과서 145 쪽

01 부정적분

● 부정적분의 뜻을 안다.
● 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 알고 다항함수의 부정적분을 구할 수 있다.

부정적분이란 무엇인가?

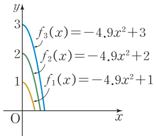
생각 열기

갈릴레이와 자유 낙하의 기본 법칙

이탈리아의 수학자 갈릴레이(Galilei, G. ; 1564~1642)는 '진공 상태에서 낙하하는 물체가 낙하한 거리는 시간의 제곱에 비례한다'는 자유 낙하의 기본 법칙을 발견하였다. 즉, 높이가 C m인 곳에서 공을 놓았을 때, x초 후의 공의 높이 $f(x)$는 $f(x)=-4.9x^2+C$(m)로 나타낼 수 있다.

탐구 활동

오른쪽 그림은 각각 1 m, 2 m, 3 m인 높이에서 공을 놓았을 때, x초 후 공의 높이 $f_1(x)$ m, $f_2(x)$ m, $f_3(x)$ m를 나타내는 그래프이다. 다음 물음에 답하여 보자.



1. 그래프를 나타내는 함수를 각각 미분하여 보자.
2. 도함수가 $-9.8x$인 함수의 식을 추측하여 보자.
3. 2의 결과로 부터 알 수 있는 것을 말하여 보자.

함수 $f(x)$를 미분하면 도함수 $f'(x)$를 얻는다.

이제 그 역으로 함수 $f(x)$가 주어졌을 때 미분하여 $f(x)$가 되는 함수에 대하여 알아보자.

함수 x^2, x^2+1, x^2+2, …를 미분하면

$$(x^2)'=2x,\ (x^2+1)'=2x,\ (x^2+2)'=2x,\ \cdots$$

❶ 이므로 함수 x^2, x^2+1, x^2+2, …의 도함수는 모두 $2x$이다.

일반적으로 함수 $F(x)$의 도함수가 $f(x)$일 때, 즉 $F'(x)=f(x)$일 때, $F(x)$를 $f(x)$의 **부정적분**이라고 한다.

● 부정적분(不定積分)을 원시함수라고도 한다.

❷ 따라서 함수 x^2, x^2+1, x^2+2, …는 모두 $2x$의 부정적분이다. 여기서 한 함수의 부정적분은 무수히 많다는 것을 알 수 있다.

01 부정적분

소단원 지도 목표

① 부정적분의 뜻을 알게 한다.
② 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 알게 한다.
③ 다항함수의 부정적분을 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 이 단원에서는 미분법의 역연산으로서 부정적분을 배우게 된다. 따라서 미분법의 기초가 되는 도함수에 대하여 알고 있어야 한다.

2. 미분한 함수와 미분하기 전의 함수를 비교해 보고, 미분한 함수가 같은 함수는 상수항만 다르다는 것을 이해시키도록 한다.

3. 부정적분에서 적분상수의 의미를 이해하고, 부정적분을 구할 때 이를 빠뜨리지 않도록 한다.

새로 나온 용어와 기호

• 부정적분(不定積分, indefinite integral)
• 적분상수(積分常數, integral constant)
• $\int f(x)dx$

생각 열기 참/고/자/료

자유낙하는 역학에서 중력 내에서 자유로이 움직이는 물체의 상태를 말한다. 보통 지표면 부근에서 일정한 중력을 받으면서 가속되어 연직선 상의 운동을 하는 경우를 말하며, 이때의 가속도의 크기는 $g=9.8\text{ m/s}^2$으로 일정하다. 이 경우 물체의 시간에 따른 위치와 속도는 위쪽을 +로 표시할 때 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x(t)=x_0+v_0t-\frac{1}{2}gt^2,\ v(t)=v_0-gt$$

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 도함수를 통해 미분과 적분 사이에 어떤 관계가 있는가를 알게 하려는 것이다.

1. 모두 $-9.8x$이다.

2. 도함수가 $-9.8x$인 함수의 식은 $-4.9x^2+$(상수)이다.

3. 함수 $f(x)$에 포함된 상수항은 미분하면 0이므로 상수항만 다른 함수들은 미분하면 모두 같은 함수를 얻을 수 있다.

본문 해설

❶ $F'(x)=f(x)$를 만족시키는 함수 $F(x)$를 $f(x)$의 원시함수, $\int_a^x f(t)dt$를 $f(x)$의 부정적분이라고 정의한다. 고등학교에서는 연속함수의 정적분만을 다루므로 여기서는 원시함수와 부정적분을 구별하지 않는다.

❷ $F(x)$를 $f(x)$의 부정적분이라고 하는 것은 $F'(x)=f(x)$일 때이다. 따라서 어떤 주어진 함수 $f(x)$의 부정적분은 여러 개 있다. 이를테면 $F(x)=x^2+2$, $G(x)=x^2+5$에 대하여 $F'(x)=2x$, $G'(x)=2x$이므로 $F(x)$와 $G(x)$는 모두 $f(x)=2x$의 부정적분이다. 여기서 $G(x)-F(x)=3$이므로 $G(x)$와 $F(x)$는 상수만큼의 차이가 있다는 것을 직관적으로 이해하도록 한다.

교과서 146 쪽

❶ 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하고, 또 다른 부정적분을 $G(x)$라고 하면 $F'(x)=f(x)$, $G'(x)=f(x)$이므로

$$\{G(x)-F(x)\}'=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$$

이다. 그런데 도함수가 0인 함수는 상수함수이므로 그 상수를 C라고 하면

$$G(x)-F(x)=C,\ 즉\ G(x)=F(x)+C$$

이다.

따라서 $f(x)$의 부정적분 중 하나를 $F(x)$라고 하면 $f(x)$의 임의의 부정적분은

$$F(x)+C\ (C는\ 상수)$$

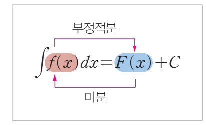
의 꼴로 나타낼 수 있고, 이것을 기호로

$$\int f(x)dx$$

와 같이 나타낸다. 즉,

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

이다. 이때 C를 **적분상수**라고 한다.



- 기호 $\int$은 '인티그럴(integral)'이라고 읽는다.
- $\int f(x)dx$에서 $f(x)$를 피적분함수라고 한다.

이와 같이 함수 $f(x)$의 부정적분을 구하는 것을 $f(x)$를 적분한다고 하며, 그 계산 방법을 적분법이라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

> **부정적분**
> $F'(x)=f(x)$일 때,
> $$\int f(x)dx=F(x)+C\ (단,\ C는\ 적분상수)$$

보기 (1) $(x)'=1$이므로 $\int 1dx=x+C$

(2) $(5x^2)'=10x$이므로 $\int 10xdx=5x^2+C$

- $\int 1dx$는 간단히 $\int dx$와 같이 나타내기도 한다.

문제 1 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int 3dx$ (2) $\int 3x^2dx$ (3) $\int 4x^3dx$

문제 2 다음 등식을 만족시키는 함수 $f(x)$를 구하여라. (단, C는 적분상수)

(1) $\int f(x)dx=x^2+3x+C$ (2) $\int f(x)dx=x^3+3x^2-2x+C$

본문 해설

❶ $F'(x)=f(x)$인 $F(x)$는 유일하지 않고 무수히 많으며 그런 함수들은 서로 상수항만 다르다. 일반적으로 $f(x)$의 두 부정적분을 $F(x)$, $G(x)$라고 하면

$G'(x)=F'(x)=f(x)$이고

$$\{G(x)-F(x)\}'=G'(x)-F'(x)$$
$$=f(x)-f(x)=0$$

이다. 즉, $G(x)-F(x)=C$이므로 $f(x)$의 부정적분은 $\int f(x)dx=F(x)+C$ (C는 적분상수)로 나타내어진다.

1

목표| 주어진 함수의 부정적분을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\int 3\,dx=\boldsymbol{3x+C}$

(2) $\int 3x^2\,dx=\boldsymbol{x^3+C}$

(3) $\int 4x^3\,dx=\boldsymbol{x^4+C}$

(단, C는 적분상수)

2

목표| 양변을 미분하여 주어진 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 양변을 미분하면

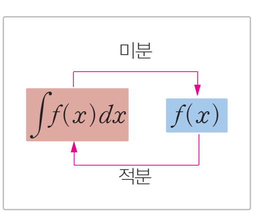
(1) $\int f(x)dx=x^2+3x+C$에서 $f(x)=\boldsymbol{2x+3}$

(2) $\int f(x)dx=x^3+3x^2-2x+C$에서

$f(x)=\boldsymbol{3x^2+6x-2}$

지/도/자/료

1. 다음 그림과 같이 미분과 적분은 역연산 관계이다.



2. 함수 $F(x)$의 도함수가 $f(x)$일 때, $F(x)$를 $f(x)$의 부정적분 또는 원시함수라 하고, 기호로 $F(x)=\int f(x)dx$와 같이 나타낸다.

이때, 원시함수는 $\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$인 어떤 확정된 함수 $F(x)$를 말하고, 임의의 함수를 $\int f(x)dx$, $F(x)+C$ (C는 임의의 상수)로 나타낼 때 이것을 $f(x)$의 부정적분이라고 하므로 원시함수와 부정적분은 같은 개념이 아니다. 그러나 일반적으로 $f(x)$가 주어진 구간에서 연속이면

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$$

이므로 부정적분과 원시함수를 같은 개념으로 사용한다.

교과서 147 쪽

부정적분은 어떻게 구하는가?

탐구 활동 다음 표는 함수 $F(x)$와 그 도함수 $F'(x)=f(x)$를 나타낸 것이다. 물음에 답하여 보자.

$f(x)$	1	x			x^4	$\cdots$	
$F(x)$	x	$\frac{1}{2}x^2$	$\frac{1}{3}x^3$	$\frac{1}{4}x^4$		$\cdots$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$

1. 위의 표를 완성하여 보자.
2. 완성된 표에는 어떤 규칙성이 있는지 찾아보자.

❶ n이 0 또는 양의 정수일 때 x^n의 부정적분에 대하여 알아보자.

n이 0 또는 양의 정수일 때,

$$\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)'=x^n\text{이므로}\qquad \int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

❷ **$y=x^n$의 부정적분**

n이 0 또는 양의 정수일 때,

$$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

$n=0$일 때,
$\int x^0 dx=\frac{1}{0+1}x^{0+1}+C$
$=x+C$

보기 (1) $\int x\,dx=\int x^1 dx=\frac{1}{1+1}x^{1+1}+C=\frac{1}{2}x^2+C$

(2) $\int x^3 dx=\frac{1}{3+1}x^{3+1}+C=\frac{1}{4}x^4+C$

❸ **문제 3** 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int x^4 dx$　　(2) $\int x^7 dx$　　(3) $\int x^{10} dx$

발전 **문제 4** 자연수 m, n에 대하여 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int x^m\cdot x^n dx$　　(2) $\int (x^m)^n dx$

탐구 활동의 이해

탐구 목표 • n이 자연수일 때 x^n의 부정적분을 구할 수 있게 하려는 것이다.

1.

$f(x)$	1	x	$\boldsymbol{x^2}$	$\boldsymbol{x^3}$	x^4	$\cdots$	$\boldsymbol{x^n}$
$F(x)$	x	$\frac{1}{2}x^2$	$\frac{1}{3}x^3$	$\frac{1}{4}x^4$	$\boldsymbol{\frac{1}{5}x^5}$	$\cdots$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$

2. x^n의 부정적분은 $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$이다. 즉 함수 $f(x)$의 (지수)+1이 함수 $F(x)$의 계수의 분모와 지수가 된다.

본문 해설

❶ 도함수와 원시함수를 구하는 과정을 통하여 미분과 적분의 관계를 이해하고, x^n의 부정적분을 발견하게 하려는 것이다. 이 단원에서는 다항함수의 부정적분만을 다루게 되므로 x^n의 부정적분의 공식을 반드시 기억하게 한다.

❷ 일반적으로 x^n의 부정적분을 구하는 식

$$\int x^n\,dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$$

는 $n\neq-1$인 실수에 대하여 성립한다. 그러나 n이 음수인 경우는 미적분 Ⅱ에서 배우므로 이 단원에서는 n이 0 또는 양의 정수인 경우만 다룬다.

❸ 부정적분의 결과를 미분하여 답을 확인하는 습관을 갖도록 한다.

3

목표 | 부정적분을 구할 수 있게 한다.

풀이 | (1) $\int x^4\,dx=\frac{1}{4+1}x^{4+1}+C=\boldsymbol{\frac{1}{5}x^5+C}$

(2) $\int x^7\,dx=\frac{1}{7+1}x^{7+1}+C=\boldsymbol{\frac{x^8}{8}+C}$

(3) $\int x^{10}\,dx=\frac{1}{10+1}x^{10+1}+C=\boldsymbol{\frac{x^{11}}{11}+C}$

(단, C는 적분상수)

4

목표 | 지수의 성질을 이용하여 부정적분을 구할 수 있게 한다.

풀이 | (1) $\int x^m\cdot x^n\,dx=\int x^{m+n}\,dx$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{m+n+1}x^{m+n+1}+C}$$

(2) $\int (x^m)^n\,dx=\int x^{mn}\,dx=\boldsymbol{\frac{1}{mn+1}x^{mn+1}+C}$

(단, C는 적분상수)

읽/기/자/료 라이프니츠


라이프니츠

라이프니츠는 1646년 7월 1일, 독일의 라이프치히에서 태어났다. 어려서부터 두뇌가 명석했던 그는 법학, 신학, 철학, 수학 등의 다양한 분야에 놀라운 재능을 가지고 있었다. 그는 미적분학에 대한 개념의 대부분을 개발하고, 미적분의 수많은 기본 공식을 만들어 내었다. 1684년에는 미적분학에 관한 최초의 논문을 발간하여 이 논문에서 현재 사용하고 있는 미분 기호인 dx와 dy를 도입하였다. 또, 라틴어 Summa(합)의 첫 글자를 따서 지금의 적분 기호 $\int$을 최초로 도입하였으며 미분법의 많은 법칙을 유도하였다.

교과서 148 쪽

❶ 이제 미분법을 역으로 생각하여 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분에 대하여 알아보자.

두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 부정적분을 각각 $F(x)$와 $G(x)$라고 하면

$$F(x)=\int f(x)dx,\ G(x)=\int g(x)dx$$

$$F'(x)=f(x),\ G'(x)=g(x)$$

이므로 다음을 알 수 있다.

[1] 임의의 실수 k에 대하여 $\{kF(x)\}'=kF'(x)=kf(x)$이므로

$$\int kf(x)dx=kF(x)$$

이다. 이때 $kF(x)=k\int f(x)dx$이므로

$$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$$

가 성립한다.

❷ [2] $\{F(x)+G(x)\}'=F'(x)+G'(x)=f(x)+g(x)$이므로

$$\int \{f(x)+g(x)\}dx=F(x)+G(x)$$

이다. 이때 $F(x)+G(x)=\int f(x)dx+\int g(x)dx$이므로

$$\int \{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$$

가 성립한다.

[3] $\{F(x)-G(x)\}'=F'(x)-G'(x)=f(x)-g(x)$이므로

$$\int \{f(x)-g(x)\}dx=F(x)-G(x)$$

이다. 이때 $F(x)-G(x)=\int f(x)dx-\int g(x)dx$이므로

$$\int \{f(x)-g(x)\}dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$$

가 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

❸ **부정적분의 성질**

(1) $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ (단, k는 상수)

(2) $\int \{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

(3) $\int \{f(x)-g(x)\}dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$

본문 해설

❶ 본 교과서 100쪽과 101쪽에 있는 미분법의 공식을 요약하면 다음과 같다.

미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

(1) $y=kf(x)$이면 $y'=kf'(x)$ (단, k는 상수)

(2) $y=f(x)+g(x)$이면 $y'=f'(x)+g'(x)$

(3) $y=f(x)-g(x)$이면 $y'=f'(x)-g'(x)$

(4) $y=f(x)g(x)$이면

$$y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

공식 (4)를 이용한 부정적분은 미적분 I의 범위를 벗어나므로 여기서는 다루지 않는다. 그러나 피적분함수가 곱의 모양으로 되어 있을 때는 전개를 한 후 합의 꼴로 바꾸어 적분할 수 있다. 이러한 경우는 여기서 지도한다. 특히 위의 공식 (1), (2), (3)은 구체적인 예를 들어서 설명하면 학생들이 부정적분의 성질을 이해하는 데 큰 도움이 될 것이다.

❷ 실수배, 합, 차의 부정적분에서 $\int f(x)dx$, $\int g(x)dx$ 등의 식 자체에 적분상수가 포함되어 있으므로 별도로 적분상수를 붙일 필요가 없다. 적분상수는 부정적분을 구할 때 마지막에 붙여 주면 된다. 예를 들어 $F'(x)=f(x)$, $G'(x)=g(x)$일 때,

$$\begin{aligned}&\int \{f(x)+g(x)\}dx\\&=\int f(x)dx+\int g(x)dx\\&=F(x)+C_1+G(x)+C_2\\&=F(x)+G(x)+C_1+C_2\end{aligned}$$

여기서 $C_1+C_2=C$라고 하면

$$\int \{f(x)+g(x)\}dx=F(x)+G(x)+C$$

❸ 부정적분의 기본 성질은 셋 이상의 함수에 대해서도 성립한다.

$$\begin{aligned}&\int \{f(x)+g(x)+h(x)\}dx\\&=\int [\{f(x)+g(x)\}+h(x)]dx\\&=\int \{f(x)+g(x)\}+\int h(x)dx\\&=\int f(x)dx+\int g(x)dx+\int h(x)dx\end{aligned}$$

지/도/자/료

적분을 지도하는 방법에는 여러 가지가 있다. 먼저, 부정적분을 미분의 역으로서 도입하고, 미분과 적분의 관계를 계속 이용하면서 다음 순서로 지도하는 것이 한 가지 방법이다.

부정적분 → 정적분 → 정적분의 활용

또 다른 방법으로는 구분구적법부터 시작하는 것이다. 이것은 적분의 초기 형태와 기본 개념에서 시작하는 것으로 다음과 같은 순서로 지도한다.

구분구적법 → 정적분 → 부정적분 → 정적분 → 정적분의 활용

이 경우 미분과 적분의 관계를 지도하기에 곤란한 점이 있으나 적분의 뜻을 이해하기 쉽다는 장점이 있다. 어떤 방법으로 지도하든지 장점과 단점이 있으므로 수업 환경에 따라 선택하면 된다. 그러나 현행 우리나라의 교육과정에서는 첫 번째 방법을 표준으로 택하고 있다.

예제 01 부정적분 $\int(3x^2+2x-5)dx$를 구하여라.

❶ 여러 개의 적분상수는 하나로 묶어서 마지막에 적분상수 C 하나로만 나타낸다.

풀이 ❷

$$\int(3x^2+2x-5)dx=\int 3x^2dx+\int 2xdx-\int 5dx$$
$$=3\int x^2dx+2\int xdx-5\int 1dx$$
$$=3\cdot\frac{1}{3}x^3+2\cdot\frac{1}{2}x^2-5\cdot x+C$$
$$=x^3+x^2-5x+C$$

답 x^3+x^2-5x+C

문제 5 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int(3x^2+2x-1)dx$ (2) $\int(6x^2-2x-1)dx$

(3) $\int(2x+5)(x-3)dx$ (4) $\int\frac{x^3}{x-1}dx-\int\frac{1}{x-1}dx$

어떤 함수의 도함수와 한 x의 값에 대응하는 함숫값을 알 때, 그 함수를 구하여 보자.

예제 02 다음 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$를 구하여라.

$$f'(x)=3x^2-2x+1,\ f(0)=3$$

풀이 $f'(x)=3x^2-2x+1$이므로

$f(x)=\int(3x^2-2x+1)dx=x^3-x^2+x+C$

주어진 조건에서 $f(0)=3$이므로 $C=3$

따라서 함수 $f(x)$는 $f(x)=x^3-x^2+x+3$

답 $f(x)=x^3-x^2+x+3$

문제 6 다음 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$를 구하여라.

(1) $f'(x)=x^3-x^2+2,\ f(0)=1$ (2) $f'(x)=x(2-x),\ f(1)=-2$

본문 해설

❶ 부정적분의 성질과 관련된 각 등식에는 각 변의 적분상수를 적절히 정할 수 있을 때, 그 등식이 성립한다는 것을 의미한다.

부정적분의 성질 (1)에서 $k=0$인 경우에는 다음을 얻는다.

(좌변)$=\int 0\,f(x)dx=C$

(우변)$=0\int f(x)dx=0$

여기서 좌변과 우변은 상수만큼만 차이가 있으므로 $k=0$일 때, 부정적분의 성질 (1)이 성립한다.

또, 부정적분이 성질 (3)에서도 $f(x)=g(x)$인 경우에는

(좌변)$=\int\{f(x)-g(x)\}dx=\int 0\,dx=C$

(우변)$=\int f(x)dx-\int g(x)dx=C_1-C_2$

로 좌변과 우변은 상수만큼만 차이가 있다.

따라서 $f(x)=g(x)$일 때, 부정적분의 성질 (3)이 성립한다.

❷ 부정적분의 성질을 일반화하면 다음과 같다.

다항함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$에 대하여

$$\int\{kf(x)+lg(x)+mh(x)\}$$
$$=k\int f(x)dx+l\int g(x)dx+m\int h(x)dx$$

(단, k, l, m은 상수)

5

목표| 부정적분의 성질을 이해하게 한다.

풀이| (1) $\int(3x^2+2x-1)dx$

$=\boldsymbol{x^3+x^2-x+C}$

(2) $\int(6x^2-2x-1)dx=\boldsymbol{2x^3-x^2-x+C}$

(3) $\int(2x+5)(x-3)dx=\int(2x^2-x-15)dx$

$=\boldsymbol{\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-15x+C}$

(4) $\int\frac{x^3}{x-1}dx-\int\frac{1}{x-1}dx=\int\frac{x^3-1}{x-1}dx$

$=\int(x^2+x+1)dx=\boldsymbol{\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+C}$

6

목표| 주어진 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $f(x)=\int(x^3-x^2+2)dx$

$=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+2x+C$

$f(0)=1$이므로 $f(0)=C=1$

따라서 $\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+2x+1}$

(2) $f(x)=\int(-x^2+2x)dx=-\frac{1}{3}x^3+x^2+C$

$f(1)=-2$이므로 $f(1)=-\frac{1}{3}+1+C=-2$, $C=-\frac{8}{3}$

따라서 $\boldsymbol{f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2-\frac{8}{3}}$

02 구분구적법

소단원 지도 목표

① 구분구적법을 이해하게 한다.

② 구분구적법을 이용하여 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 구분구적법은 정적분의 정의를 이해하는 것이 그 목적이므로 간단한 도형을 이용하여 그 원리를 충분히 이해하는 데 초점을 두어야 한다.

2. 구분구적법에 의한 계산에서는 수열의 합을 구할 수 있어야 하므로 이 합을 구하는 계산에 숙달되도록 해야 한다.

3. 도형을 분할하는 데 있어서 일정한 기준에 의하여 동일하게 분할하는 것이 편리함을 이해시킨다.

새로 나온 용어와 기호

• 구분구적법(區分求積法, quadrature by parts)

교과서 150 쪽

02 구분구적법

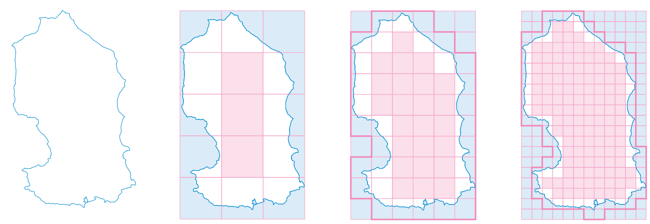
● 구분구적법을 이해하고, 이를 이용하여 간단한 도형의 넓이와 부피를 구할 수 있다.

구분구적법이란 무엇인가?

생각 열기

탐구 활동

강화도의 넓이를 구하기 위하여 다음 그림과 같이 강화도의 지도 위에 한 변의 길이가 각각 1 cm, 0.5 cm, 0.25 cm인 정사각형 모눈을 그렸을 때, 물음에 답하여 보자.



〈그림 1〉 〈그림 2〉 〈그림 3〉

1. 각 그림에서 강화도의 내부에 있는 정사각형의 개수를 a, 강화도의 내부 및 경계선을 포함하는 정사각형의 개수를 b라고 할 때, 표를 완성하여 보자.

구분	그림 1	그림 2	그림 3
a			120
b			185

2. 각 그림에서 강화도의 내부에 있는 정사각형의 넓이의 합을 m, 강화도의 내부 및 경계선을 포함하는 정사각형의 넓이의 합을 M이라고 할 때, 표를 완성하여 보자.

구분	그림 1	그림 2	그림 3
m			7.5
M			11.5625
$M-m$			4.0625

3. 모눈의 한 변의 길이를 0.1 cm, 0.01 cm, …와 같이 점점 작게 할 때, $M-m$의 값은 어떻게 변할지 추측하여 보자.

생각 열기 참/고/자/료

강화도는 인천광역시 강화군에 속한 섬으로 경기만 내의 한강 하구에 있다. 우리나라에서는 5번째, 인천광역시에서는 제일 큰 섬이다.

최고봉인 마니산(摩尼山: 469 m)을 비롯하여, 400 m 내외의 산이 많으나 험준하지 않다. 저평한 충적지가 발달했으며, 남쪽 강화만으로는 넓은 간석지가 펼쳐져 있다. 기후는 대체로 한서의 차가 심하며 비가 많다. 1월 평균기온 $-4.7\,^{\circ}\mathrm{C}$ 내외, 8월 평균기온 $25\,^{\circ}\mathrm{C}$ 내외, 연강수량 1,143 mm 정도이다. 같은 위도의 내륙지방보다는 따뜻하여 난대성식물인 탱나무, 동백나무 등이 자생한다. 강화읍을 중심으로 도로가 사방으로 나 있으며, 1970년에 강화대교(694 m)가 건설되면서 육지와 연결되어 교통이 더욱 편리해졌다. 특히 고려의 대몽고 항전지였기 때문에 곳곳에 역사적인 유물 유적이 많아 안보 · 사적관광지로도 손꼽힌다. 면적은 293 km^2이고, 해안선의 길이는 99 km이다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 곡선으로 둘러싸인 섬의 넓이를 크기가 다른 모눈의 개수로 구해 봄으로써 구분구적법의 개념에 자연스럽게 접근하도록 하려는 것이다.

1.

구분	그림 1	그림 2	그림 3
a	**3**	**24**	120
b	**15**	**54**	185

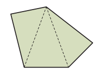
2.

구분	그림 1	그림 2	그림 3
m	**3**	**6**	7.5
M	**15**	**13.5**	11.5625
$M-m$	**12**	**7.5**	4.0625

3. 점점 작아진다.

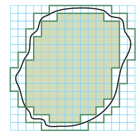
교과서 151 쪽

오른쪽 그림과 같이 다각형의 넓이는 몇 개의 삼각형이나 사각형으로 분할하여 그 분할된 넓이의 합으로 구할 수 있다. 그러나 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 이와 같은 방법으로 구할 수 없다.



이제 곡선으로 둘러싸인 평면도형의 넓이를 구하는 방법에 대하여 알아보자.

오른쪽 그림과 같이 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S, 곡선의 내부에 있는 정사각형들의 넓이의 합을 m, 곡선의 내부와 곡선의 경계선을 포함하는 정사각형들의 넓이의 합을 M이라고 하면



$$m \le S \le M$$

이다. 이때 정사각형의 크기를 한없이 작게 하면 m과 M은 도형의 넓이 S에 가까워지므로, m과 M의 극한을 구하면 이 도형의 넓이를 알 수 있다.

❶ 일반적으로 어떤 도형의 넓이 또는 부피를 구할 때, 주어진 도형을 몇 개의 기본 도형으로 나누고, 그 기본 도형의 넓이나 부피의 합으로 어림한 값을 구한 뒤에 이 어림한 값의 극한값으로 그 도형의 넓이 또는 부피를 구하는 방법을 **구분구적법**이라고 한다.

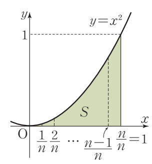
예를 들어 곡선 $y=x^2$과 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이 S를 구분구적법으로 구하여 보자.

❷ 오른쪽 그림과 같이 구간 $[0,\ 1]$을 n등분하면 양 끝 점과 각 분점의 x좌표는 차례로

$$0,\ \frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \cdots,\ \frac{n-1}{n},\ \frac{n}{n}(=1)$$

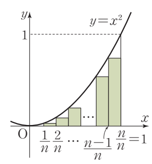
이고, 이에 대응하는 곡선의 y좌표는 각각

$$0,\ \left(\frac{1}{n}\right)^2,\ \left(\frac{2}{n}\right)^2,\ \cdots,\ \left(\frac{n-1}{n}\right)^2,\ \left(\frac{n}{n}\right)^2$$



이다. 이때 〈그림 1〉에서 색칠한 직사각형의 넓이의 합을 S_n이라고 하면 S_n은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n}\cdot 0+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n^3}\{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\} \\ &= \frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &= \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$



〈그림 1〉

본문 해설

❶ 구분구적법은 정적분의 기초가 되는 개념이므로 그 원리를 정확히 아는 것이 필요하지만 그 계산 과정이 매우 복잡하므로 비교적 간단한 예를 중심으로 그 원리를 익히는 데 초점을 두도록 한다. 구분구적법에 의하여 도형의 넓이나 부피를 구할 때에는 n 또는 $(n-1)$개의 작은 도형으로 나누어 그들의 넓이나 부피를 더하여 각각의 근삿값을 구한다. 이 근삿값에서 $n \to \infty$일 때의 극한값을 생각하여 넓이를 구하는 방법을 구분구적법이라고 한다.
구분구적법은 아르키메데스의 실진법이나 케플러의 맥주통의 부피를 구하는 방법 등에 잘 나타나 있다.

❷ 구분구적법에 의하여 도형의 넓이나 부피를 구할 때는 다음 차례로 한다.

(1) 주어진 도형을 충분히 작은 n개의 기본 도형으로 세분한 다음 이 기본 도형들의 넓이 또는 부피의 합 S_n을 구한다.

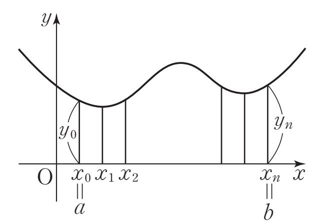
(2) (1)에서 구한 S_n의 극한값을 구하여 구하려는 도형의 넓이 또는 부피 S를 구한다.

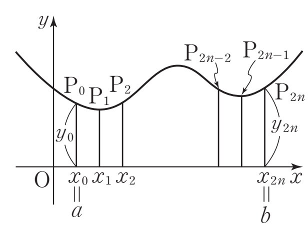
지/도/자/료

• 정적분의 근사 공식

도형의 넓이를 구하는 정적분의 근사 공식으로 심프슨의 공식(Simpson's formula)과 사다리꼴 공식(trapezoidal formula)이 많이 쓰인다.
심프슨의 공식은 토마스 심프슨이 만든 적분법으로 다음과 같다.

$$\int_a^b f(x)dx \fallingdotseq \frac{h}{3}[y_0+4(y_1+y_3+\cdots+y_{2n-1}) +2(y_2+y_4+\cdots+y_{2n-2})+y_{2n}]$$





위의 그림에서 한 개의 소구간의 곡선을 이차함수로 보고 P_{2n-1}이 y축 위로 오도록 평행이동하면 그 단위 면적은
$\frac{h}{3}(y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n})$

사다리꼴 공식은 다음과 같다.

$$\int_a^b f(x)dx \fallingdotseq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

사다리꼴 공식은 임의의 함수 $f(x)$에 맞춰 사다리꼴을 그림으로써 적분값을 구한다.
이 적분식을 보다 정확히 계산하기 위해서 적분 구간 $[a,\ b]$를 더 작은 부분 구간들로 나눈 후, 각 부분 구간에 사다리꼴 공식을 적용해서 모든 부분 구간의 넓이의 합을 구해도 된다.

$$\int_a^b f(x)dx \fallingdotseq \frac{b-a}{n}\left\{\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right\}$$

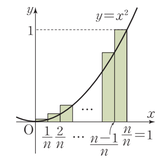
사다리꼴 공식의 확장은 다음과 같다.

$$\int_a^b f(x)dx$$

$$\fallingdotseq \frac{b-a}{2n}\{f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(x_n)\}$$

교과서 152 쪽

❶ 또 〈그림 2〉에서 색칠한 직사각형의 넓이의 합을 T_n이라고 하면 T_n은 다음과 같다.



〈그림 2〉

$$T_n=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2$$
$$=\frac{1}{n^3}\{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2+n^2\}$$
$$=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

따라서 구하는 넓이 S에 대하여 $S_n<S<T_n$이 성립하므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n\leq S\leq\lim_{n\to\infty}T_n$$

이다.

이때

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}$$
$$\lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}$$

이므로 $S=\frac{1}{3}$이다.

참고 함수 $y=x^2$과 같은 연속함수의 경우에는 $\lim_{n\to\infty}S_n$과 $\lim_{n\to\infty}T_n$ 중에서 어느 한쪽의 극한이 존재하면 나머지 한쪽의 극한도 반드시 존재하고, 그 값이 같다는 것이 알려져 있다. 따라서 $\lim_{n\to\infty}S_n$과 $\lim_{n\to\infty}T_n$ 중에서 하나만 구하면 된다.

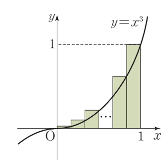
문제 **1** 곡선 $y=x^3$과 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 구간 $[0, 1]$을 n등분하여 양 끝 점과 각 분점의 x좌표를 차례로 구하여라.

(2) (1)에서 구한 x좌표에 대응하는 곡선의 y좌표를 차례로 구하여라.

(3) 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이를 구하여라.

(4) 도형의 넓이 S를 구하여라.



본문 해설

❶ 각 소구간의 왼쪽 끝 점의 함숫값을 높이로 하는 직사각형의 넓이의 합 S_n과 각 소구간의 오른쪽 끝 점의 함숫값을 높이로 하는 직사각형의 넓이의 합 T_n의 극한값이 같음을 증명하는 것은 고등학교 과정에서 어렵다. 그러나 계산기를 이용하여 근삿값을 구하면 직관적으로 이해할 수 있다. 다음 표로부터 n이 증가하면 S_n, T_n은 $\frac{1}{3}$로 근접함을 알 수 있다.

n	S_n	T_n
10	0.2850000	0.3850000
20	0.3087500	0.3587500
30	0.3168519	0.3501852
50	0.3234000	0.3434000
100	0.3283500	0.3383500
1000	0.3328335	0.3338335

1

목표| 구분구적법을 이용하여 도형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\mathbf{0,\ \frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \cdots,\ \frac{n-1}{n},\ \frac{n}{n}}$

(2) $\mathbf{0^3,\ \left(\frac{1}{n}\right)^3,\ \left(\frac{2}{n}\right)^3,\ \cdots,\ \left(\frac{n-1}{n}\right)^3,\ \left(\frac{n}{n}\right)^3}$

(3) $\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^3+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^3$

$=\frac{1}{n^4}\{1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3+n^3\}$

$=\frac{1}{n^4}\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2=\frac{1}{4}\left\{\frac{n^2(n+1)^2}{n^4}\right\}$

$=\frac{1}{4}\left\{\frac{(n+1)^2}{n^2}\right\}=\mathbf{\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}$

(4) $S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=\mathbf{\frac{1}{4}}$

지/도/자/료

1. 구분구적법에 많이 사용하는 공식

- $\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

2. 구분구적법으로 도형의 넓이를 구할 때, 반드시 소구간의 끝 점에서 함숫값을 생각할 필요는 없다. 즉, 다음과 같은 방법으로 접근하여도 된다.

함수 $y=f(x)$는 구간 $[a, b]$에서 연속이라고 하자.

또 구간 $[a, b]$를 n개의 소구간으로 등분하고, 그 등분점을

$a_0=a,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a,\ a_{n-1},\ a_n=b$

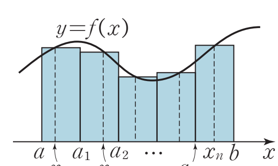
라고 하자. 또 이러한 소구간의 길이를 h라고 하면

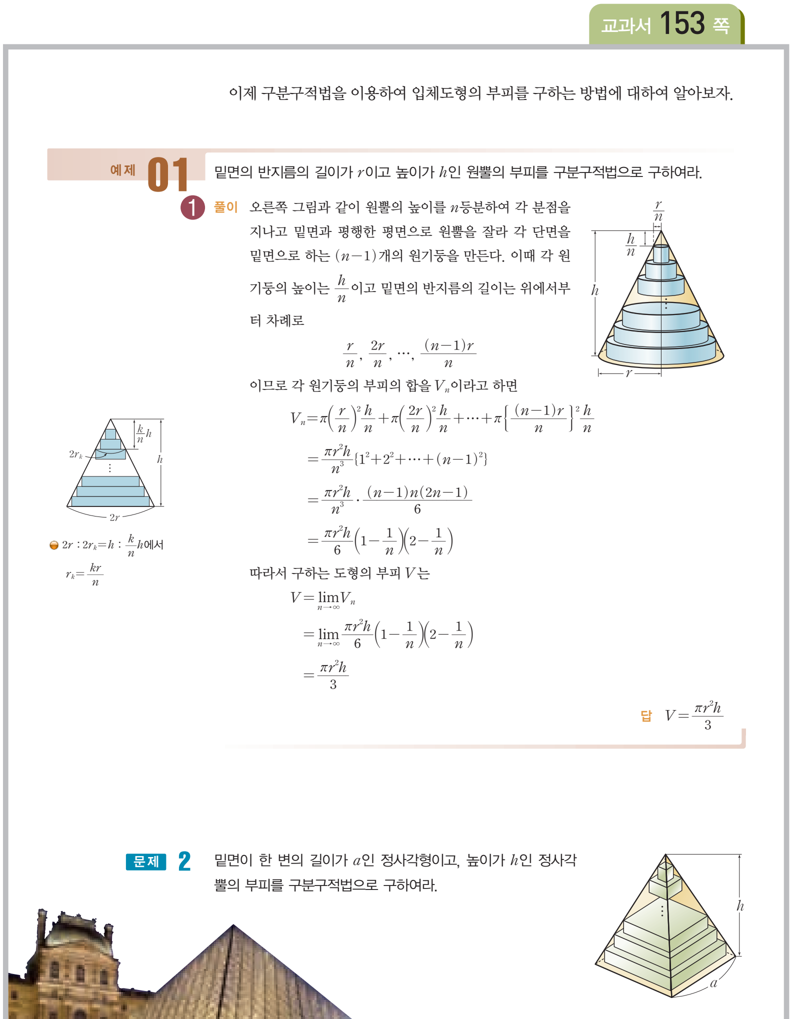
$h=\frac{1}{n}(b-a)$

이다. 소구간 $[a_{k-1}, a_k]$의 임의의 값 x_i에 대하여

$\sum_{k=1}^{n}f(x_k)h=f(x_1)h+f(x_2)h+\cdots+f(x_n)h$ ……㉠

를 생각하면 $f(x)\geq0$일 때, ㉠은 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이가 된다.





교과서 153 쪽

이제 구분구적법을 이용하여 입체도형의 부피를 구하는 방법에 대하여 알아보자.

예제 01 밑면의 반지름의 길이가 r이고 높이가 h인 원뿔의 부피를 구분구적법으로 구하여라.

❶ **풀이** 오른쪽 그림과 같이 원뿔의 높이를 n등분하여 각 분점을 지나고 밑면과 평행한 평면으로 원뿔을 잘라 각 단면을 밑면으로 하는 $(n-1)$개의 원기둥을 만든다. 이때 각 원기둥의 높이는 $\frac{h}{n}$이고 밑면의 반지름의 길이는 위에서부터 차례로

$$\frac{r}{n},\ \frac{2r}{n},\ \cdots,\ \frac{(n-1)r}{n}$$

이므로 각 원기둥의 부피의 합을 V_n이라고 하면

$$V_n=\pi\left(\frac{r}{n}\right)^2\frac{h}{n}+\pi\left(\frac{2r}{n}\right)^2\frac{h}{n}+\cdots+\pi\left\{\frac{(n-1)r}{n}\right\}^2\frac{h}{n}$$
$$=\frac{\pi r^2h}{n^3}\{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\}$$
$$=\frac{\pi r^2h}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$
$$=\frac{\pi r^2h}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$$

따라서 구하는 도형의 부피 V는

$$V=\lim_{n\to\infty}V_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi r^2h}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$$
$$=\frac{\pi r^2h}{3}$$

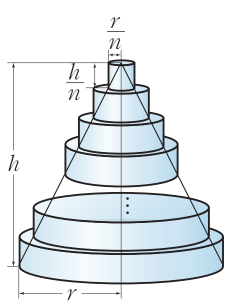
답 $V=\frac{\pi r^2h}{3}$

$2r:2r_k=h:\frac{k}{n}h$에서

$r_k=\frac{kr}{n}$

문제 2 밑면이 한 변의 길이가 a인 정사각형이고, 높이가 h인 정사각뿔의 부피를 구분구적법으로 구하여라.

본문 해설



❶ 오른쪽 그림과 같이 밑변의 반지름의 길이가 r, 높이가 h인 원뿔의 높이를 n등분하고 각 분점을 지나고 밑면에 평행한 평면으로 원뿔을 자른 후 n개의 원기둥의 부피의 합을 V_n이라고 하면

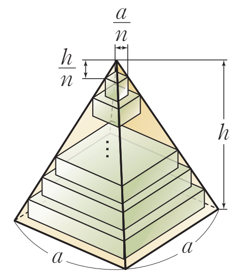
$$V_n=\frac{h}{n}\left\{\pi\left(\frac{r}{n}\right)^2+\pi\left(\frac{2r}{n}\right)^2+\cdots+\pi\left(\frac{nr}{n}\right)^2\right\}$$
$$=\frac{h}{n}\sum_{k=1}^{n}\pi\left(\frac{kr}{n}\right)^2=\frac{\pi r^2h}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2$$
$$=\frac{\pi r^2h}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$=\frac{1}{6}\pi r^2h\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

따라서 구하는 사각뿔의 부피 V는

$$V=\lim_{n\to\infty}V_n=\frac{1}{6}\pi r^2h\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}\pi r^2h$$

2

목표| 구분구적법을 활용하여 사각뿔의 부피를 구할 수 있게 한다.



풀이| 오른쪽 그림과 같이 정사각뿔의 높이를 n등분하고 각 분점을 지나고 밑면에 평행한 평면으로 정사각뿔을 자르면 각 단면의 한 변의 길이는 위에서부터 차례로 다음과 같다.

$$\frac{a}{n},\ \frac{2a}{n},\ \cdots,\ \frac{(n-1)a}{n}$$

각 단면을 밑면으로 하고 높이가 $\frac{h}{n}$인 $(n-1)$개의 직육면체의 부피의 합 V_n은

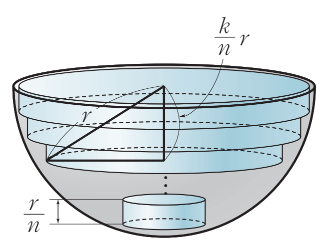
$$V_n=\frac{h}{n}\left\{a^2\left(\frac{1}{n}\right)^2+a^2\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+a^2\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right\}$$
$$=\frac{a^2h}{n^3}\{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2\}$$
$$=\frac{a^2h}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$
$$=\frac{1}{6}a^2h\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$$

따라서 피라미드(사각뿔)의 부피 V는

$$V=\lim_{n\to\infty}V_n=\boldsymbol{\frac{1}{3}a^2h}$$

지/도/자/료

구분구적법을 이용하여 반지름의 길이가 r인 구의 부피 V를 구해 보자.



오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이 r를 n등분하면 $(n-1)$개의 원기둥의 부피의 합 V_n은

$$V_n=\sum_{k=1}^{n-1}\pi r_k^2\frac{r}{n}$$
$$=\sum_{k=1}^{n-1}\pi\left\{\sqrt{r^2-\left(\frac{kr}{n}\right)^2}\right\}^2\frac{r}{n}$$
$$=\frac{\pi r^3}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}(n^2-k^2)=\frac{\pi r^3}{n^3}\left\{n^2(n-1)-\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right\}$$
$$=\pi r^3\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\right\}$$

따라서 구의 부피 V는 $V=2\lim_{n\to\infty}V_n=2\pi r^3\left(1-\frac{2}{6}\right)=\frac{4}{3}\pi r^3$

03 정적분

소단원 지도 목표

① 정적분의 뜻을 알게 한다.
② 부정적분과 정적분의 관계를 이해하게 한다.
③ 미적분의 기본 정리를 이해하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 구분구적법을 이용한 정적분의 정의는 $f(x)$가 $f(x)\geq 0$인 경우뿐만 아니라 임의의 연속함수일 때에도 성립함을 알도록 한다.
2. 정적분에서 적분변수는 x 대신 다른 문자를 사용해도 관계없다는 것을 알게 한다.
3. 정적분의 계산에서는 적분상수 C를 쓸 필요가 없음을 이해하게 한다.

새로 나온 용어와 기호

- 정적분(定積分, definite integral)
- 미적분의 기본 정리(微積分의基本定理, fundamental theorem of calculus)
- $\int_a^b f(x)dx$, $\Big[F(x)\Big]_a^b$

교과서 154 쪽

03 정적분

- 정적분의 뜻을 안다.
- 부정적분과 정적분의 관계를 이해하고, 이를 이용하여 정적분을 구할 수 있다.

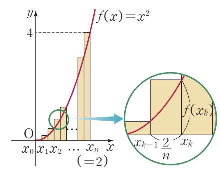
정적분이란 무엇인가?

탐구 활동

오른쪽 그림과 같이 곡선 $f(x)=x^2$과 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구분구적법을 이용하여 구하려고 한다.

$$x_0=0,\ x_1=\frac{2}{n},\ x_2=\frac{4}{n},\ \cdots,\ x_n=\frac{2n}{n}$$

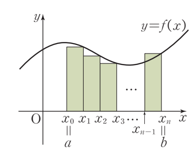
이라고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.



1. n개로 나누어진 직사각형의 가로의 길이를 구하여 보자.
2. 왼쪽에서 k번째에 있는 직사각형의 넓이를 구하여 보자.
3. 세로의 길이가 $f(x_k)\,(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$, 가로의 길이가 $\varDelta x$인 n개의 직사각형의 넓이의 합을 식으로 나타내어 보자.

함수 $y=f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(x)\geq 0$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구하여 보자.

❶ 닫힌 구간 $[a,\ b]$를 n등분하고 양 끝 점을 포함하여 각 분점의 x좌표를 차례로



$$a=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n=b$$

라고 하면 각 구간의 길이 $\varDelta x$는

$$\varDelta x=\frac{b-a}{n}$$

이다.

$\varDelta x=x_k-x_{k-1}=\frac{b-a}{n}$
(단, $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$)

오른쪽 그림의 각 직사각형의 넓이의 합 S_n은

$$S_n=f(x_1)\varDelta x+f(x_2)\varDelta x+\cdots+f(x_n)\varDelta x=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\varDelta x$$

이다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 구분구적법을 이용하여 곡선과 x축 및 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있음을 이해하고, 이를 이용하여 정적분의 정의를 유도하도록 한다.

1. $\frac{2}{n}$

2. k번째 직사각형의 세로의 길이가 $\left(\frac{2k}{n}\right)^2$이므로

$\left(\frac{2k}{n}\right)^2\frac{2}{n}$

3. $f(x_1)\varDelta x+f(x_2)\varDelta x+\cdots+f(x_n)\varDelta x=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\varDelta x$

본문 해설

❶ • 세로의 길이가 $f(x_i)\ (i=1,\ 2,\ \cdots)$, 가로의 길이가 $\varDelta x$인 n개의 직사각형의 넓이의 합 $\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\varDelta x$를 구해 보게 함으로써 $\lim_{x\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\varDelta x$를 $\int_a^b f(x)dx$로 나타내는 과정을 쉽게 이해할 수 있도록 지도한다.

• 연속함수 $f(x)$의 정적분 $\int_a^b f(x)dx$를 정의할 때는 구분구적법을 이용하기 위해 먼저 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)\geq 0$인 경우에 대하여 정의한다.
그러나 $f(x)\geq 0$인 조건이 없어도 함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이기만 하면 극한값 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_k)\varDelta x$는 존재하므로 정적분 $f(x)dx$가 정의됨을 알게 한다.

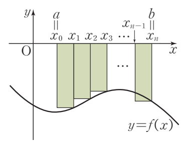
교과서 155 쪽

n이 한없이 커지면 S_n의 극한값은 S와 일치하므로 다음이 성립한다.

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$$

한편 함수 $y=f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(x)<0$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$ 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라고 하자.

오른쪽 그림의 각 직사각형의 넓이의 합 S_n은



$$S_n=\{-f(x_1)\}\Delta x+\{-f(x_2)\Delta x\}$$
$$+\cdots+\{-f(x_n)\}\Delta x$$
$$=-\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$$

이다. n이 한없이 커지면 S_n의 극한값은 S와 일치하므로 다음이 성립한다.

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$$

일반적으로 함수 $y=f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이면 극한값 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$가 반드시 존재한다.

이 극한값을 함수 $y=f(x)$의 a에서 b까지의 **정적분**이라고 하며, 이것을 기호로

$$\int_a^b f(x)dx$$

와 같이 나타낸다.

또 정적분 $\int_a^b f(x)dx$를 구하는 것을 함수 $f(x)$를 a에서 b까지 적분한다고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

● 정적분 $\int_a^b f(x)dx$에 대하여 구간 $[a, b]$를 적분 구간, $f(x)$를 피적분함수, x를 적분변수, a, b를 각각 정적분의 아래끝, 위끝이라고 한다.

❶ **정적분의 정의**

함수 $y=f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x\left(\text{단, }\Delta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\Delta x\right)$$

❷ 정적분의 정의에서 정적분의 값은 함수 $f(x)$와 구간 $[a, b]$에 의하여 결정되므로 변수를 x 대신에 다른 문자를 사용하여 나타내어도 그 값은 변하지 않는다. 즉,

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(y)dy$$

가 성립한다.

읽/기/자/료 현대적 의미의 적분법

구적 문제에 극한을 처음으로 도입한 사람은 16세기 스테빈(Stevin, S. ; 1548~1620)이었으며, 넓이나 부피가 한없이 작은 부분이 무수히 많이 모여서 된 것으로 생각한 사람은 케플러(Kepler, J. ; 1571~1630)이었다. 그리고 좀 더 엄밀하게 구적법을 다룬 수학자는 카발리에리(Cavalieri, F. B. ; 1598~1647)인데 그는 '넓이는 폭이 없는 선의 모임'이고, 부피는 두께가 없는 면의 모임'으로 생각하여 "불가분량의 기하"를 저술하기도 했다.

카발리에리는 $\int_0^a x^2\,dx=\frac{a^{n+1}}{n+1}$ ($n=9$까지)을 증명하였고, 페르마(Fermat, P.; 1601~1665)는 $\int_0^a x^{\frac{q}{p}}dx=\frac{p}{p+q}a^{\frac{p+q}{p}}$을 보였으며, 파스칼(Pascal, B. ; 1623~1662)도 넓이, 회전체의 부피 등을 계산하였다.

극한 개념을 사용하여 현대적 의미의 적분법을 시도한 사람은 뉴턴(Newton, I. ; 1642~1727)과 라이프니츠(Leibniz, G. W. ; 1646~1716)이다. 그러나 극한의 개념이 확실하지 않아 그들의 방법도 직관적인 개념에 머물러 있었으며 코시(Cauchy, A. L. ; 1789~1857)에 와서야 극한의 엄밀한 정의를 사용하여 현대적 의미의 적분이 완성되었다.

본문 해설

❶ 함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속이면 정적분은 다음과 같다.

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{b-a}{n}f(x_k)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b-a}{n}f(x_k)$$

❷ 정적분 $\int_a^b f(x)dx$는 하나의 수이지만 부정적분 $\int f(x)dx$는 하나의 함수로 다음과 같은 차이가 있음에 주의한다.

$$\int f(x)dx\neq\int f(t)dt\neq\int f(y)dy$$
$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(y)dy$$

• 리만의 정적분의 정의

정적분을 정의할 때, 각 소구간의 왼쪽 끝 점 또는 오른쪽 끝 점에서의 함숫값만을 생각할 필요는 없다. 독일의 수학자 리만(Riemann, G. F. B. ; 1826~1866)은 다음과 같이 적분을 정의하였다.

함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 구간 $[a, b]$를 동일한 폭 $\Delta x=\frac{b-a}{n}$를 갖는 n개의 소구간들로 분할하고 이들 소구간들의 끝 점들을 각각 $x_0(=a)$, x_1, x_2, x_3, $\cdots$, $x_n(=b)$으로 놓자. 이 소구간들에서 이 구간을 대표하는 점 x_i^*가 i번째 소구간에 속하도록 점들을 하나씩 선택하자. 그러면 a로부터 b까지의 f의 정적분은

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i^*)\Delta x$$

이다. 위의 정의에서 점 x_i^*를 어떻게 선택한다 하더라도 극한은 항상 같은 값을 가진다. 만일 점 x_i^*를 각 소구간의 오른쪽 끝점으로 선택한다면 적분의 정의는 교과서와 동일함을 알 수 있다.

1

목표| 정적분의 정의를 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\displaystyle\int_0^2 3x\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\varDelta x$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{6k}{n}\cdot\frac{2}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{12}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{12}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\mathbf{6}$$

(2) $\displaystyle\int_0^3 x^2\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\varDelta x$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3k}{n}\right)^2\cdot\frac{3}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{27}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{27}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\mathbf{9}$$

(3) $\displaystyle\int_0^2 (-x^2)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\varDelta x$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{-\left(\frac{2k}{n}\right)^2\right\}\cdot\frac{2}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{8}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{8}{n^3}\right)\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=-\frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}$$

(4) $\displaystyle\int_0^1 (-x^3)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\varDelta x$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(-\frac{k}{n}\right)^3\right\}\cdot\frac{1}{n}$$

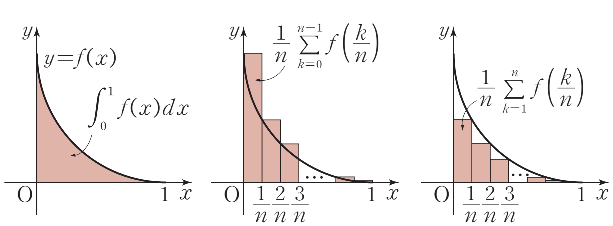
$$=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n}k^3\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n^4}\right)\times\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$$

사고력 기르기 추론

출제 의도| 정적분의 뜻을 완전히 이해하고 있으며, 이를 이용하여 다양한 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이|



$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\le\int_0^1 f(x)\,dx\le\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

교과서 156 쪽

예제 01 정적분의 정의에 따라 $\displaystyle\int_0^2 2x\,dx$의 값을 구하여라.

풀이 $f(x)=2x$라고 하면

함수 $f(x)$는 구간 $[0, 2]$에서 연속이다.

정적분의 정의에서 $a=0$, $b=2$라고 하면

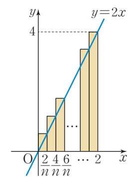
$$\varDelta x=\frac{b-a}{n}=\frac{2}{n},\ x_k=a+k\varDelta x=\frac{2k}{n}$$

$f(x_k)=2x_k=\dfrac{4k}{n}$ 이므로

$$\int_0^2 2x\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\varDelta x$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{4k}{n}\cdot\frac{2}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{8}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=4$$



답 4

문제 1 정적분의 정의에 따라 다음 값을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int_0^2 3x\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^3 x^2\,dx$

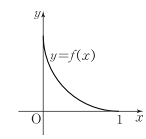
(3) $\displaystyle\int_0^2 (-x^2)\,dx$ (4) $\displaystyle\int_0^1 (-x^3)\,dx$

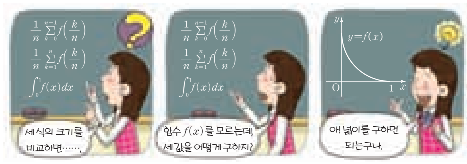
사고력 기르기

▶추론
의사소통
문제 해결

오른쪽 그림과 같이 $0\le x\le 1$에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여 다음 세 값의 대소 관계를 설명하여 보자.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right),\quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right),\quad \int_0^1 f(x)\,dx$$





지/도/자/료

1. 구간 $[a, b]$에서 함수 $f(x)$, $g(x)$가 연속일 때,

(1) $f(x)\ge 0$이면 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\ge 0$

(2) $f(x)\ge g(x)$이면 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\ge\int_a^b g(x)\,dx$

2. 정적분의 정의에 의하여 극한 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\varDelta x$가 존재할 때 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$가 존재한다고 한다. 구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$는 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$가 존재한다. 그러나 연속함수가 아니면 구간 $[a, b]$에서 유계일지라도 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$가 존재하지 않을 수 있다. 예를 들어 함수 $f(x)=\begin{cases}1 & (x\text{는 유리수})\\ 0 & (x\text{는 무리수})\end{cases}$에 대하여 각 소구간에서 $f(x_k)=1$로 택할 때와 $f(x_k)=0$으로 택할 때 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\varDelta x$의 값이 다르다.

따라서 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$가 존재하지 않는다.

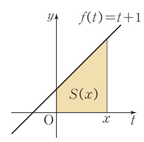
교과서 157 쪽

미적분의 기본 정리란 무엇인가?

생각 열기

탐구 활동

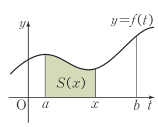
오른쪽 그림과 같이 함수 $f(t)=t+1$과 t축 및 두 직선 $t=0$, $t=x$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(x)$라고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.



1. 사다리꼴의 넓이 $S(x)$를 x에 관한 식으로 나타내고, $S'(x)$를 구하여 보자.
2. 정적분 기호를 이용하여 $S(x)$를 나타내어 보자.
3. $S'(x)$와 $f(x)$를 비교하여 보자.

1 정적분과 미분의 관계에 대하여 알아보자.

함수 $y=f(t)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(t)\ge 0$이라고 하자. 오른쪽 그림과 같이 구간 $[a,\ b]$에 속하는 임의의 x에 대하여 곡선 $y=f(t)$와 t축 및 두 직선 $t=a$, $t=x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(x)$라고 하면



$$S(x)=\int_a^x f(t)\,dt \qquad \cdots\cdots ①$$

이다. 이때 x의 증분 Δx에 대한 $S(x)$의 증분을 ΔS라고 하면

$$\Delta S=S(x+\Delta x)-S(x)$$

이다.

본문 해설

1 적분과 미분과의 관계는 피적분함수 $f(t)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이면 구간 $[a,\ b]$의 임의의 점 x에 대하여 a에서 x까지 $f(t)$를 정적분하고, 이를 x에 관하여 미분하면 원래의 함수 $f(x)$가 된다는 것이다. 이것은 적분이 미분의 역연산임을 뜻한다.

지/도/자/료

1. 정적분을 계산할 때, 정적분의 정의를 이용해야 하지만 정의에는 극한과 수열의 합이 포함되어 있어서 함수 $f(x)$가 복잡하면 계산이 매우 복잡해진다. 따라서 정적분을 구하기 위한 다른 계산 방법이 필요함을 이해할 수 있게 지도한다.
2. 미적분의 기본 정리를 유도하는 과정은 엄밀한 증명을 피하고 직관에 의하여 이해할 수 있도록 전개하되 결과만을 강조하는 일이 없도록 한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 구간 $[0,\ x]$에서 연속함수 $f(x)$의 그래프와 x축 사이에 있는 부분의 넓이를 정적분으로 구해보고, 다시 미분해보는 과정을 통하여 정적분과 부정적분의 관계를 이해할 수 있도록 하려는 것이다.

1. 직선 $f(t)=t+1$이 점 $(0,\ 1)$, $(x,\ x+1)$을 지나므로

$$S(x)=\frac{1}{2}\times x\times\{1+(x+1)\}=\frac{1}{2}x^2+x,$$

$$S'(x)=x+1$$

2. $S(x)=\int_0^x (t+1)\,dt$

3. $S'(x)=f(x)$

읽/기/자/료 적분과 미분과의 관계에 대한 간단한 역사

미분법이 발견되고 극한의 개념이 수학적으로 엄밀해지고 난 후 현대적 의미의 미분법과 그 역연산으로서의 부정적분이 정의되었지만 구분구적법을 토대로 한 정적분은 미분과의 관련성을 찾지 못하였다.

그러나 17세기에 들어와 배로(Barrow, I. ; 1630～1677)는 점들이 서로 알려진 배로 미분삼각형 내에서 근접하는 현의 극한으로 주어진 접선인 곡선에서 접선의 식을 얻어 미분의 역의 인식을 본질적으로 전개하기 시작했고, 미분과 적분이 서로 역이라는 생각을 하게 되었다. 그러나 배로는 미적분학의 기본적인 정리를 명백히 진술하지는 못했고, 나중에 뉴턴이 이것에 대한 연구를 계속 진행하여 미적분의 기본 정리를 명백하게 진술하였다.

기원전부터 사용되던 정적분과 17세기에 와서야 정립된 미분이 서로 역연산의 관계임을 알려 준 정리가 미적분의 기본 정리이다. 이 정리에 의하여 비로소 정적분의 일반적인 계산이 가능하게 되어 적분학이라는 수학의 성립이 가능하게 되었고, 미분과 적분이 역연산임을 알게 된 것이다.

본문 해설

❶ $S(x+\Delta x)-S(x)$

$$=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt$$

$$=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

가 구간 $[x,\ x+\Delta x]$에서 연속이므로 적분의 평균값 정리에 의하여

$$\frac{S(x+\Delta x)-S(x)}{\Delta x}=f(c)$$

인 c가 x와 $x+\Delta x$ 사이에 적어도 하나 존재한다. 이때, $f(t)$가 $t=x$에서 연속이므로 $\Delta x \longrightarrow 0$이면 $c \longrightarrow x$이다. 따라서

$$S'(x)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{S(x+\Delta x)-S(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x \to 0} f(c)=f(x)$$

한편 $\Delta x<0$인 경우에도 마찬가지로 증명된다.

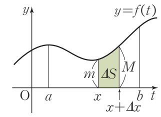
교과서 158 쪽

한편 구간 $[x,\ x+\Delta x]$ 또는 구간 $[x+\Delta x,\ x]$에서 함수 $y=f(t)$는 연속이므로 최댓값과 최솟값을 가진다.

❶ $\Delta x>0$일 때, 구간 $[x,\ x+\Delta x]$에서 $y=f(t)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라고 하면

$$m\cdot\Delta x\le\Delta S\le M\cdot\Delta x \qquad \cdots\cdots ②$$

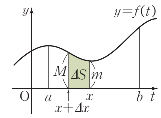
이다.



$\Delta x<0$일 때, 구간 $[x+\Delta x,\ x]$에서 $y=f(t)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라고 하면

$$M\cdot\Delta x\le\Delta S\le m\cdot\Delta x \qquad \cdots\cdots ③$$

이다.



부등식 ②와 ③의 각 변을 Δx로 나누면 Δx의 부호에 관계없이

$$m\le\frac{\Delta S}{\Delta x}\le M$$

이 성립한다. 이때 $\Delta x \longrightarrow 0$이면

$$\lim_{\Delta x\to 0} m\le\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta x}\le\lim_{\Delta x\to 0} M$$

이다.

그런데 함수 $y=f(t)$는 구간 $[a,\ b]$에서 연속이므로 $\Delta x \longrightarrow 0$이면 $m \longrightarrow f(x)$이고 $M \longrightarrow f(x)$이다.

따라서 $f(x)\le\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta x}\le f(x)$, 즉 $f(x)\le\frac{d}{dx}S(x)\le f(x)$이므로

$$\frac{d}{dx}S(x)=f(x)$$

이다. 즉, ①로부터

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

정적분과 미분의 관계

함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x) \text{ (단, } a<x<b\text{)}$$

지/도/자/료

1. 적분에 관한 평균값 정리

함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이면

$$\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$$

가 성립하는 점 c가 구간 $(a,\ b)$에 존재한다.

증명| 함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이므로 $f(x_M)=M$과 최솟값 $f(x_m)=m$을 가진다. 따라서 모든 $x\in[a,\ b]$에 대하여 $m\le f(x)\le M$이므로

$$\int_a^b m\,dx\le\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b M\,dx \qquad \cdots\cdots ㉠$$

가 된다. 그런데 ㉠은

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$$

이므로 양변을 $b-a$로 나누면

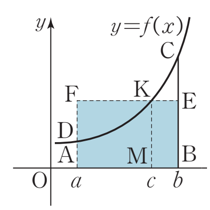
$$m=f(x_m)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le f(x_M)=M$$

따라서 연속함수의 사이값 정리에 의하여

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

가 성립하는 점 c가 구간 $(a,\ b)$에 존재한다.

오른쪽 그림에서 보는 바와 같이 함수 f가 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(x)>0$이면 적분에 대한 평균값 정리는 기하학적으로 영역 ABCD의 넓이를 나타내는 정적분 $\int_a^b f(x)dx$와 가로가 $b-a$이고 세로가 $f(c)$인 직사각형 ABEF의 넓이 $f(c)(b-a)$가 서로 같아지도록 하는 점 $c\in(a,\ b)$가 존재함을 보여준다.



2. 정적분을 이용한 함수의 정의

함수를 정의할 때, 함수식이 구체적으로 주어지기도 하지만 $S(x)=\int_a^x f(t)dt$와 같이 적분을 이용하여 정의할 수도 있다. 이런 정의는 생소해 보이지만 물리학, 화학, 통계학 등에서 이와 같은 방법을 사용하고 있다.

보기 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_7^x (t^2+3t+2)dt=x^2+3x+2$

문제 2 다음을 구하여라.

(1) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_5^x (3y^2-8y+9)dy$ (2) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{-3}^x (3t-2)(t+8)dt$

이제 정적분과 미분의 관계를 이용하여 부정적분과 정적분 사이의 관계에 대하여 알아보자.

함수 $y=f(t)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때

$$S(x)=\int_a^x f(t)dt$$

라고 하면 $S'(x)=f(x)$이므로 $S(x)$는 함수 $f(x)$의 부정적분이다.

함수 $f(x)$의 또 다른 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$S(x)=\int_a^x f(t)dt=F(x)+C \ (C\text{는 적분상수}) \quad \cdots\cdots ①$$

이다. $S(x)$의 정의에 의하여 $x=a$이면 $S(a)=0$이므로 ①에서 $x=a$를 대입하면

$$S(a)=F(a)+C=0 \quad \text{즉, } C=-F(a)$$

이다. 이것을 ①에 대입하면

$$S(x)=\int_a^x f(t)dt=F(x)-F(a)$$

를 얻고, 이 등식에 $x=b$를 대입하고 변수 t를 x로 바꾸면

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

이다. 여기서 $F(b)-F(a)$를 기호로

$$\Big[F(x)\Big]_a^b$$

와 같이 나타낸다.

이상을 정리하면 다음과 같고, 이것을 **미적분의 기본 정리**라고 한다.

❶ **미적분의 기본 정리**

구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

즉, 이 정리는 넓이를 구하기 위하여 부분합을 계산하고 그 극한을 구하는 복잡한 과정을 거치지 않고 미분법의 공식을 역으로 적용하여 부정적분을 구하기만 하면 된다는 것을 보여준다.

정적분 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$를 구할 때는 먼저 피적분함수 $f(x)$의 부정적분

$\displaystyle\int f(x)dx=F(x)+C$

를 구한 후 미적분의 기본 정리를 이용한다.

미적분의 기본 정리를 이용하면

$\displaystyle\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$이므로

(1) $\displaystyle\int_a^a f(x)dx=F(a)-F(a)=0$

(2) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

$\qquad =-\{F(a)-F(b)\}$

$\qquad =-\displaystyle\int_b^a f(x)dx$

가 성립한다.

2

목표 | 정적분과 미분과의 관계를 이해하게 한다.

풀이 | (1) $\mathbf{3x^2-8x+9}$

(2) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{-3}^x (3t^2+22t-16)dt$

$=3x^2+22x-16$

$=\mathbf{(3x-2)(x+8)}$

본문 해설

❶ 미적분의 기본 정리는 함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때 정적분 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$의 정의를 이용하지 않고서도 쉽게 정적분을 구하는 방법을 알려 준다.

지/도/자/료

함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 구간 $[a, b]$를 동일한 폭 $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$를 갖는 n개의 소구간들로 분할하고 이들 소구간들의 끝 점을 각각 $x_0(=a)$, x_1, x_2, x_3, $\cdots$, $x_n(=b)$로 놓자.

$F'(x)=f(x)$이면

$$\begin{aligned} F(b)-F(a) &= F(x_n)-F(x_0) \\ &= F(x_n)-F(x_{n-1})+F(x_{n-1})-F(x_{n-2})+\cdots \\ &\quad +F(x_1)-F(x_0) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\{F(x_i)-F(x_{i-1})\} \end{aligned}$$

F는 연속이고 각 소구간 $[x_{i-1}, x_i]$에서 평균값 정리를 이용하면 $F(x_i)-F(x_{i-1})=F'(x_i^*)(x_i-x_{i-1})=f(x_i^*)\Delta x$를 만족하는 x_{i-1}과 x_i 사이에 x_i^*가 존재한다. 그러므로

$$F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x$$

이 등식의 양변에 극한을 취하면

$$F(b)-F(a)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x=\int_a^b f(x)dx$$

교과서 160 쪽

예제 02 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_{1}^{2}(4x+3)dx$ (2) $\int_{-1}^{3}3x^2dx$

❶ 풀이 (1) $\int(4x+3)dx=2x^2+3x+C$이므로

$\int_{1}^{2}(4x+3)dx=\Big[2x^2+3x\Big]_{1}^{2}=14-5=9$

(2) $\int 3x^2dx=x^3+C$이므로

$\int_{-1}^{3}3x^2dx=\Big[x^3\Big]_{-1}^{3}=3^3-(-1)^3=28$

답 (1) 9 (2) 28

문제 3 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_{1}^{3}dx$ (2) $\int_{-1}^{2}(2x-6)dx$

(3) $\int_{-2}^{3}(3x^2-2x)dx$ (4) $\int_{0}^{1}(4x^3+3x^2)dx$

❷ 한편 $a=b$, $a>b$일 때에는 $\int_{a}^{b}f(x)dx$를 다음과 같이 정의한다.

$$\int_{a}^{a}f(x)dx=0,\ \int_{a}^{b}f(x)dx=-\int_{b}^{a}f(x)dx$$

이 정의에 의하여 $a>b$이고 $f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$일 때,

$$\int_{a}^{b}f(x)dx=-\int_{b}^{a}f(x)dx=-\Big[F(x)\Big]_{b}^{a}=\Big[F(x)\Big]_{a}^{b}$$

이다.

따라서 미적분의 기본 정리는 적분 구간 $[a, b]$에 관계없이 항상 성립한다.

예제 03 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_{2}^{-1}3x^2dx$ (2) $\int_{1}^{0}(1+4x)dx$

❸ 풀이 (1) $\int_{2}^{-1}3x^2dx=\Big[x^3\Big]_{2}^{-1}=(-1)^3-2^3=-9$

(2) $\int_{1}^{0}(1+4x)dx=-\int_{0}^{1}(1+4x)dx=-\Big[x+2x^2\Big]_{0}^{1}=-(3-0)=-3$

답 (1) -9 (2) -3

본문 해설

❶ 정적분 $\int_{a}^{b}f(x)dx$를 구할 때는 먼저 피적분함수 $f(x)$의 부정적분

$\int f(x)dx=F(x)+C$

를 구한 후 미적분의 기본 정리를 이용한다.

3

목표| 부정적분을 이용하여 정적분을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\int_{1}^{3}dx=\Big[x\Big]_{1}^{3}=3-1=\mathbf{2}$

(2) $\int_{-1}^{2}(2x-6)dx=\Big[x^2-6x\Big]_{-1}^{2}$

$=-8-7=\mathbf{-15}$

(3) $\int_{-2}^{3}(3x^2-2x)dx=\Big[x^3-x^2\Big]_{-2}^{3}$

$=18-(-12)=\mathbf{30}$

(4) $\int_{0}^{1}(4x^3+3x^2)dx=\Big[x^4+x^3\Big]_{0}^{1}=2-0=\mathbf{2}$

본문 해설

❷ $\int_{a}^{b}f(x)dx$에서 $a=b$인 경우 즉,

$\int_{a}^{a}f(x)dx$인 경우는 $\Delta x=0$이므로 정적분의 정의에 의하여 $\int_{a}^{a}f(x)dx=0$이다.

미적분의 기본 정리에 의하여 $F(a)-F(a)=0$이고, 평면에서 선분의 넓이가 0임을 이용하여 직관적으로도 이해할 수 있도록 지도한다.

예) $\int_{100}^{100}(x^{150}+2435x^{120})dx=0$

❸ $G(x)$가 $F(x)$와 다른 $f(x)$의 부정적분이면

$G(x)=F(x)+C$이므로

$\Big[G(x)\Big]_{a}^{b}=\Big[F(x)+C\Big]_{a}^{b}$

$=F(b)+C-F(a)-C$

$=F(b)-F(a)$

$=\Big[F(x)\Big]_{a}^{b}$

가 되어 $f(x)$의 부정적분 $F(x)$의 선택에 관계없이 $\Big[F(x)\Big]_{a}^{b}$의 값은 일정하다.

또 정적분의 계산에서는 적분상수에 관계없이 일정한 값을 가지므로 적분상수를 생략할 수 있음을 알게 한다.

4

목표| $a>b$인 경우 적분 구간을 바꾸어 정적분을 계산할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\int_{2}^{-2}dx=-\int_{-2}^{2}dx=-\Big[x\Big]_{-2}^{2}$

$=-\{2-(-2)\}=\mathbf{-4}$

(2) $\int_{2}^{0}(-4x+2)dx=\int_{0}^{2}(4x-2)dx$

$=\Big[2x^2-2x\Big]_{0}^{2}=\mathbf{4}$

(3) $\int_{1}^{-2}(3x^2+2x)dx=-\int_{-2}^{1}(3x^2+2x)dx$

$=-\Big[x^3+x^2\Big]_{-2}^{1}$

$=-\{2-(-4)\}=\mathbf{-6}$

교과서 161 쪽

문제 4 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_{2}^{-2} dx$ (2) $\int_{2}^{0}(-4x+2)dx$ (3) $\int_{1}^{-2}(3x^2+2x)dx$

예제 04 임의의 실수 x에 대하여 등식 $\int_{a}^{x} f(t)dt=x^2-2x-3$을 만족시키는 함수 $f(x)$와 상수 a의 값을 구하여라.

❶ 풀이 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x)=2x-2$

또 주어진 식에 $x=a$를 대입하면 $\int_{a}^{a} f(t)dt=0$이므로 $(a+1)(a-3)=0$

따라서 $a=-1$ 또는 $a=3$

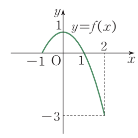
답 $f(x)=2x-2$, $a=-1$ 또는 $a=3$

문제 5 임의의 실수 x에 대하여 등식 $\int_{1}^{x} f(t)dt=4x^2-5x+a$를 만족시키는 함수 $f(x)$와 상수 a의 값을 구하여라.

발전 **문제 6** 구간 $[-1, 2]$에서 정의된 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같다. 이때 함수

$$g(x)=\int_{-1}^{x} f(t)dt$$

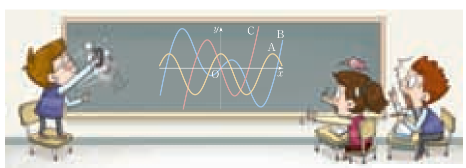
의 최댓값을 구하여라.



사고력 기르기

추론
▸의사소통
문제 해결

다음 그림은 함수 $y=f(x)$, $y=f'(x)$, $y=\int_{0}^{x} f(t)dt$의 그래프를 나타낸 것이다. 각각의 그래프가 어느 함수의 그래프인지 말하여 보자.



5

목표| $\frac{d}{dx}\int_{a}^{x} f(t)dt=f(x)$임을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $f(x)=\frac{d}{dx}\int_{1}^{x} f(t)dt=\mathbf{8x-5}$

$\int_{1}^{1} f(t)dt=0$이므로

$4\times1^2-5\times1+a=0$, $\mathbf{a=1}$

6

목표| $\frac{d}{dx}\int_{a}^{x} f(t)dt=f(x)$임을 이용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $f(x)=-x^2+1$이므로

$g(x)=\int_{-1}^{x}(-t^2+1)dt=-\frac{1}{3}x^3+x+\frac{2}{3}$

$g'(x)=\frac{d}{dx}\int_{-1}^{x} f(t)dt=f(x)=-x^2+1$

$g'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	$-$
$g(x)$	0	↗	$\frac{4}{3}$	↘	0

따라서 $g(x)$의 최댓값은 $\mathbf{\frac{4}{3}}$

본문 해설

❶ 함수 $f(t)$가 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라고 하면 미적분의 기본 정리에 의하여

$$\int_{a}^{x} f(t)dt=F(x)-F(a)$$

가 성립하므로 $\int_{a}^{x} f(t)dt$는 x에 대한 함수가 된다.

함수 $G(x)=\int_{a}^{x} f(t)dt$를 미분하면

$$G'(x)=\frac{d}{dx}\int_{a}^{x} f(t)dt$$

$$=\frac{d}{dx}\{(F(x)-F(a))\}=F'(x)=f(x)$$

즉, $\frac{d}{dx}\int_{a}^{x} f(t)dt=f(x)$

이때, t를 x로 나타내어 $\int_{a}^{x} f(x)dx$와 같이 쓰지 않도록 유의하여 지도한다.

사고력 기르기 의사소통

출제 의도| $\frac{d}{dx}\int_{a}^{x} f(t)dt=f(x)$임을 이용하여 문제를 해결할 수 있도록 한다.

풀이| $F(x)=\int_{0}^{x} f(t)dt$로 놓으면 $F(0)=0$이므로 $F(x)$의 그래프는 원점을 지나는 B 또는 C이다.

한편 $F'(x)=\frac{d}{dx}\int_{0}^{x} f(t)dt=f(x)$이므로 $F'(0)=f(0)$

(i) $F(x)$의 그래프가 B일 때

$x=0$에서 $F(x)$는 증가상태이므로 $F'(0)>0$

즉, $f(0)>0$이므로 $f(x)$의 그래프는 A이다.

(ii) $F(x)$의 그래프가 C일 때

$x=0$에서 $F(x)$는 감소상태이므로 $F'(0)<0$

즉, $f(0)<0$인 그래프는 없다.

따라서 **A는 $y=f(x)$의 그래프, B는 $y=\int_{0}^{x} f(t)dt$의 그래프, C는 $y=f'(x)$의 그래프이다.**

04 정적분의 계산

소단원 지도 목표

① 실수배, 합, 차로 표현된 다항함수의 정적분을 구할 수 있게 한다.
② 정적분을 이용하여 극한값을 구할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 정적분의 연산에 관한 성질은 부정적분의 성질을 이용한다.

2. 정적분을 구할 때는 간단한 함수만 다루도록 한다.

3. 극한값을 구하는 문제는 극한값을 정적분으로 나타내는 수준에서 다룬다. 또 모든 급수의 합을 정적분으로 구할 수 있는 것은 아님을 유의하도록 한다.

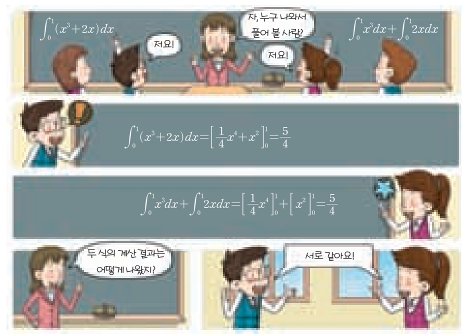
교과서 162 쪽

04 정적분의 계산

● 실수배, 합, 차로 표현된 다항함수의 정적분을 구할 수 있다.

정적분의 계산은 어떻게 하는가?

생각 열기



탐구 활동 위와 같은 방법으로 두 함수 $f(x)=x^3$, $g(x)=2x$에 대하여 다음의 값을 비교하여 보자.

1. $2\int_0^1 f(x)\,dx$와 $\int_0^1 2f(x)\,dx$

2. $\int_0^1 f(x)\,dx-\int_0^1 g(x)\,dx$와 $\int_0^1 \{f(x)-g(x)\}\,dx$

3. $\int_0^2 f(x)\,dx$와 $\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^2 f(x)\,dx$

탐구 활동 **1**에서 $2\int_0^1 x^3dx=\frac{1}{2}$이고, $\int_0^1 2x^3dx=\frac{1}{2}$이므로

$$2\int_0^1 x^3dx=\int_0^1 2x^3dx$$

임을 알 수 있다. 마찬가지로 탐구 활동 **2**, **3**에서 두 정적분의 결과도 각각 같음을 알 수 있다. 이와 같은 성질이 정적분에서 일반적으로 성립함을 알아보자.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 정적분의 계산을 쉽게 하기 위해서는 정적분의 성질을 이용해야 하므로 부정적분의 성질과 미적분의 기본 정리를 복습하도록 한다.

1. $2\int_0^1 f(x)\,dx=\mathbf{\frac{1}{2}}$, $\int_0^1 2f(x)\,dx=\mathbf{\frac{1}{2}}$

2. $\int_0^1 f(x)\,dx-\int_0^1 g(x)\,dx=\frac{1}{4}-1=\mathbf{-\frac{3}{4}}$

$\int_0^1 \{f(x)-g(x)\}\,dx=\int_0^1 (x^3-2x)\,dx=\mathbf{-\frac{3}{4}}$

3. $\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2 x^3dx=\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2=4-0=\mathbf{4}$

$\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^2 f(x)\,dx$

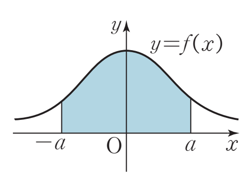
$=\int_0^1 x^3dx+\int_1^2 x^3dx=\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1+\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2$

$=\left(\frac{1}{4}-0\right)+\left(4-\frac{1}{4}\right)=\mathbf{4}$

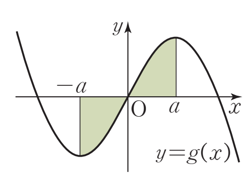
지/도/자/료

적분의 성질을 이해하게 하여 정적분을 계산하는 능력을 갖게 하도록 한다. 이때, 부정적분의 계산 성질로부터 정적분의 계산 성질을 유도할 수 있는 방법을 생각해 보도록 지도한다.

(1) $f(-x)=f(x)$를 만족시키는 함수를 우함수라 하고 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.
예를 들어 짝수 차수 함수 $f(x)=x^{2n}$은 우함수이다.



(2) $g(-x)=-g(x)$를 만족시키는 함수를 기함수라 하고 $y=g(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.
예를 들어 홀수 차수 함수 $g(x)=x^{2n-1}$은 기함수이다.



교과서 163 쪽

먼저 부정적분의 성질과 미적분의 기본 정리를 이용하여 함수의 실수배, 합, 차의 정적분에 대하여 알아보자.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 한 부정적분을 각각 $F(x)$, $G(x)$라고 하면 임의의 실수 k에 대하여

$$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx=kF(x)+C$$

이므로

$$\int_a^b kf(x)dx=\Big[kF(x)\Big]_a^b=kF(b)-kF(a)=k\{F(b)-F(a)\}$$
$$=k\int_a^b f(x)dx$$

가 성립한다. 또

$$\int\{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$$
$$=F(x)+G(x)+C$$

이므로

$$\int_a^b\{f(x)+g(x)\}dx=\Big[F(x)+G(x)\Big]_a^b$$
$$=\{F(b)+G(b)\}-\{F(a)+G(a)\}$$
$$=\{F(b)-F(a)\}+\{G(b)-G(a)\}$$
$$=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$

가 성립한다.

❶ 같은 방법으로

$$\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$$

가 성립함을 알 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

❷ **정적분의 성질 [1]**

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

(1) $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$ (단, k는 실수)

(2) $\int_a^b\{f(x)+g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

(3) $\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$

본문 해설

❶ 두 연속함수 $f(x)$, $g(x)$의 부정적분을 각각

$$F(x)=\int f(x)dx,\ G(x)=\int g(x)dx$$

라 하면

$$\int\{f(x)-g(x)\}dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$$
$$=F(x)-G(x)$$

이므로

$$\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx=\Big[F(x)-G(x)\Big]_a^b$$
$$=\{F(b)-G(b)\}-\{F(a)-G(a)\}$$
$$=\{F(b)-F(a)\}-\{G(b)-G(a)\}$$
$$=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$$

따라서

$$\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$$

가 성립한다.

❷ 정적분과 우함수, 기함수는 다음과 같은 관계가 있음을 같이 알아두면 편리하다.

(1) $f(x)$가 우함수일 때

$$\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$$

(2) $g(x)$가 기함수일 때

$$\int_{-a}^a g(x)dx=0$$

지/도/자/료

두 함수 f와 g가 구간 $[a, b]$에서 적분가능하면

(i) $\int_a^b\{f(x)+g(x)\}dx$

$$=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$

(ii) $\int_a^b cf(x)dx=c\int_a^b f(x)dx$ (c는 상수)

인 성질을 증명해 보자.

(i) Riemann적분의 정의에 의하여

$$\int_a^b\{f(x)+g(x)\}dx$$
$$=\lim_{\|P\|\to0}\sum_{k=1}^n\{f(c_k)+g(c_k)\}\Delta x_k$$
$$=\lim_{\|P\|\to0}\left\{\sum_{k=1}^n f(c_k)\Delta x_k+\sum_{k=1}^n g(c_k)\Delta x_k\right\}$$
$$=\lim_{\|P\|\to0}\sum_{k=1}^n f(c_k)\Delta x_k+\lim_{\|P\|\to0}\sum_{k=1}^n g(c_k)\Delta x_k$$
$$=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$

(ii)는 $\sum_{k=1}^n cf(c_k)\Delta x_k=c\sum_{k=1}^n f(c_k)\Delta x_k$를 이용하여 쉽게 증명된다.

기/초/력 향상 문제

다음 정적분을 우함수 또는 기함수인 것을 이용하여 구하여라.

1 $\int_{-1}^1(x^4+2x^2)dx$

2 $\int_{-2}^2(x^5+x^3+x)dx$

답 **1** $\frac{26}{15}$ **2** 0

교과서 164 쪽

예제 01 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_{-1}^{1}(6x^2+4x+2)dx$ (2) $\int_{0}^{1}(x+1)^2dx-\int_{0}^{1}(x-1)^2dx$

❶ **풀이** (1) $\int_{-1}^{1}(6x^2+4x+2)dx=6\int_{-1}^{1}x^2dx+4\int_{-1}^{1}x\,dx+2\int_{-1}^{1}dx$

$$=6\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1}+4\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1}+2\left[x\right]_{-1}^{1}$$

$$=4+0+4=8$$

(2) $\int_{0}^{1}(x+1)^2dx-\int_{0}^{1}(x-1)^2dx=\int_{0}^{1}\{(x+1)^2-(x-1)^2\}dx$

$$=\int_{0}^{1}4x\,dx=4\int_{0}^{1}x\,dx$$

$$=4\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}=2$$

답 (1) 8 (2) 2

문제 1 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_{1}^{2}(x^2-x+3)dx$ (2) $\int_{1}^{2}x^5dx+\int_{1}^{2}(3-x^5)dx$

(3) $\int_{-3}^{1}(x+3)(x-1)dx$ (4) $\int_{1}^{2}(x-1)(x+1)dx-\int_{1}^{2}3x^2dx$

❷ 이제 분할된 구간에서의 정적분에 대하여 알아보자.

임의의 실수 a, b, c를 포함하는 구간에서 연속인 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

이므로

$$\int_{a}^{c}f(x)dx+\int_{c}^{b}f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_{a}^{c}+\Big[F(x)\Big]_{c}^{b}$$

$$=\{F(c)-F(a)\}+\{F(b)-F(c)\}$$

$$=F(b)-F(a)$$

$$=\int_{a}^{b}f(x)dx$$

이다.

본문 해설

❶ 정적분의 성질을 이용하여 다항함수

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

의 정적분을 구하면 다음과 같다.

$$\int_{a}^{b}f(x)dx$$

$$=\int_{a}^{b}(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0)dx$$

$$=\int_{b}^{a}a_nx^ndx+\int_{a}^{b}a_{n-1}x^{n-1}dx+\cdots$$

$$+\int_{a}^{b}a_1x\,dx+\int_{a}^{b}a_0\,dx$$

$$=a_n\int_{a}^{b}x^ndx+a_{n-1}\int_{a}^{b}x^{n-1}dx+\cdots$$

$$+a_1\int_{a}^{b}x\,dx+a_0\int_{a}^{b}dx$$

$$=a_n\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{a}^{b}+a_{n-1}\left[\frac{x^n}{n}\right]_{a}^{b}+\cdots$$

$$+a_1\left[\frac{x^2}{2}\right]_{a}^{b}+a_0\Big[x\Big]_{a}^{b}$$

$$=\left[\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_{n-1}}{n}x^n+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{a_1}{2}x^2+a_0x\right]_{a}^{b}$$

$$=\frac{a_n}{n+1}(b^{n+1}-a^{n+1})+\frac{a_{n-1}}{n}(b^n-a^n)+\cdots$$

$$+\frac{a_1}{2}(b^2-a^2)+a_0(b-a)$$

1

목표| 정적분의 성질을 이용하여 다항함수의 정적분을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\int_{1}^{2}(x^2-x+3)dx$

$$=\int_{1}^{2}x^2dx-\int_{1}^{2}x\,dx+\int_{1}^{2}3\,dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}\right]_{1}^{2}-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{1}^{2}+\Big[3x\Big]_{1}^{2}$$

$$=\frac{7}{3}-\frac{3}{2}+3=\mathbf{\frac{23}{6}}$$

(2) $\int_{1}^{2}x^5dx+\int_{1}^{2}(3-x^5)dx=\int_{1}^{2}\{x^5+(3-x^5)\}dx$

$$=\int_{1}^{2}3\,dx=\Big[3x\Big]_{1}^{2}=\mathbf{3}$$

(3) $\int_{-3}^{1}(x+3)(x-1)dx=\int_{-3}^{1}(x^2+2x-3)dx$

$$=\frac{28}{3}-8-12=\mathbf{-\frac{32}{3}}$$

(4) $\int_{1}^{2}(x-1)(x+1)dx-\int_{1}^{2}3x^2dx$

$$=\int_{1}^{2}(x^2-1-3x^2)dx=\int_{1}^{2}(-2x^2-1)dx$$

$$=\left[\frac{-2x^3}{3}\right]_{1}^{2}-\Big[x\Big]_{1}^{2}=-\frac{14}{3}-1=\mathbf{-\frac{17}{3}}$$

본문 해설

❷ $\int_{a}^{b}f(x)dx=\int_{a}^{c}f(x)dx+\int_{c}^{b}f(x)dx$는 다음과 같이 활용된다.

(1) $\int_{a}^{c}f(x)dx-\int_{b}^{c}f(x)dx=\int_{a}^{c}f(x)dx+\int_{c}^{b}f(x)dx$

$$=\int_{a}^{b}f(x)dx$$

(2) $\int_{a}^{b}f(x)dx-\int_{a}^{c}f(x)dx=\int_{c}^{b}f(x)dx$

특히 $\int_{a}^{b}f(x)dx=\int_{a}^{c}f(x)dx+\int_{c}^{b}f(x)dx$는 a, b, c의 크기에 관계없이 항상 성립한다.

교과서 165 쪽

이상을 정리하면 다음과 같다.

정적분의 성질 [2]

임의의 실수 a, b, c를 포함하는 구간에서 함수 $f(x)$가 연속일 때,

$$\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$$

보기 $\int_1^2(x^2-5x)dx+\int_2^3(x^2-5x)dx=\int_1^3(x^2-5x)dx=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2\right]_1^3=-\frac{34}{3}$

문제 2 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_0^1(3x^2-2x)dx+\int_1^2(3x^2-2x)dx$

(2) $\int_{-1}^2(2x-x^3)dx-\int_3^2(2x-x^3)dx$

● $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

예제 02 정적분 $\int_0^2|x-1|dx$를 구하여라.

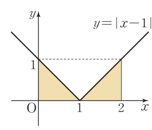
1 ● 절댓값이 있는 정적분의 경우 구간을 나누어 계산한다.

풀이 $f(x)=|x-1|$이라고 하면

$$f(x)=\begin{cases}-x+1 & (0\le x\le 1)\\ x-1 & (1\le x\le 2)\end{cases}$$

따라서 구하는 정적분은

$$\int_0^2|x-1|dx=\int_0^1(-x+1)dx+\int_1^2(x-1)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^1+\left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_1^2$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$



답 1

문제 3 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_{-1}^2|2x-1|dx$ (2) $\int_{-2}^3|x^2-x|dx$

2

목표 | 정적분의 성질 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$를 이용하여 다항함수의 정적분을 구할 수 있게 한다.

풀이 | (1) $\int_0^1(3x^2-2x)dx+\int_1^2(3x^2-2x)dx$

$$=\int_0^2(3x^2-2x)dx=\left[x^3-x^2\right]_0^2=\mathbf{4}$$

(2) $\int_{-1}^2(2x-x^3)dx-\int_3^2(2x-x^3)dx$

$$=\int_{-1}^2(2x-x^3)dx+\int_2^3(2x-x^3)dx$$
$$=\int_{-1}^3(2x-x^3)dx$$
$$=\left[x^2-\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^3=\left(3^2-\frac{3^4}{4}\right)-\left(1-\frac{1}{4}\right)=\mathbf{-12}$$

본문 해설

1 정적분 $\int_0^2|x-1|dx$를 구할 때,

구간 $[0,\ 1]$에서는 $|x-1|=-x+1$이고,

구간 $[1,\ 2]$에서는 $|x-1|=x-1$이다.

따라서

$\int_0^2|x-1|dx$를 계산할 때

$$\int_0^2|x-1|dx=\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_0^2=\frac{4}{2}-2=2$$

와 같이 계산하지 않도록 한다.

3

목표 | 정적분의 성질

$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$를 이용하여 절댓값이 있는 다항함수의 정적분을 구할 수 있게 한다.

풀이 | (1) $f(x)=\begin{cases}-2x+1 & \left(x\le\frac{1}{2}\right)\\ 2x-1 & \left(x\ge\frac{1}{2}\right)\end{cases}$이므로

$$\int_{-1}^2|2x-1|dx$$
$$=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(-2x+1)dx+\int_{\frac{1}{2}}^2(2x-1)dx$$
$$=\left[-x^2+x\right]_{-1}^{\frac{1}{2}}+\left[x^2-x\right]_{\frac{1}{2}}^2$$
$$=\frac{9}{4}+\frac{9}{4}=\frac{18}{4}=\mathbf{\frac{9}{2}}$$

(2) $f(x)=\begin{cases}x^2-x & (x\le 0)\\ -x^2+x & (0\le x\le 1)\\ x^2-x & (x\ge 1)\end{cases}$ 이므로

$$\int_{-2}^3|x^2-x|dx$$
$$=\int_{-2}^0(x^2-x)dx+\int_0^1(-x^2+x)dx+\int_1^3(x^2-x)dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^0+\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_1^3$$
$$=\frac{14}{3}+\frac{1}{6}+\frac{28}{6}=\mathbf{\frac{19}{2}}$$

교과서 166 쪽

1 함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 급수의 합을 정적분으로 나타내면

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\varDelta x=\int_a^b f(x)dx\left(\text{단, } \varDelta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\varDelta x\right)$$

이므로 정적분을 이용하여 급수의 합을 구할 수 있다.

예제 03 정적분을 이용하여 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$을 구하여라.

풀이 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left\{\left(\dfrac{1}{n}\right)^2+\left(\dfrac{2}{n}\right)^2+\left(\dfrac{3}{n}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{n}{n}\right)^2\right\}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k}{n}\right)^2\cdot\dfrac{1}{n}$

$f(x)=x^2$, $a=0$, $b=1$로 놓으면 $\varDelta x=\dfrac{b-a}{n}=\dfrac{1}{n}$, $x_k=a+k\varDelta x=\dfrac{k}{n}$

따라서 정적분의 정의에 의하여

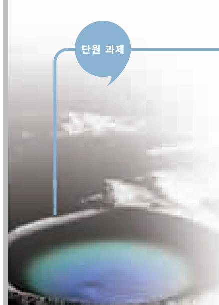
$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x^2dx=\left[\dfrac{1}{3}x^3\right]_0^1=\dfrac{1}{3}$

답 $\dfrac{1}{3}$

문제 4 정적분을 이용하여 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4}{n^5}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2+\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^2+\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^2+\cdots+\left(1+\dfrac{n}{n}\right)^2\right\}$



단원 과제

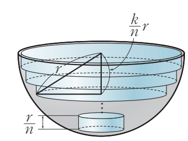
앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

반지름의 길이가 r인 반구 모양의 분화구에 가득찬 얼음의 부피를 다음 순서대로 구하여라.

(1) 높이가 $\dfrac{r}{n}$인 원기둥을 $(n-1)$개 내접시킬 때, 위에서 k번째 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 구하여라.

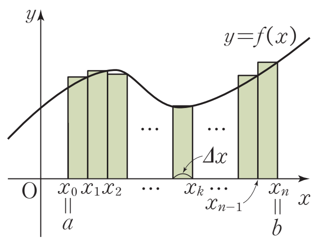
(2) k번째 원기둥의 부피를 구하여라.

(3) 반구의 부피를 정적분의 정의를 이용하여 구하여라.



본문 해설

1



정적분의 정의에 의하여 함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\varDelta x$$

$$\left(\varDelta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+\frac{b-a}{n}k\right)$$

이므로 정적분을 이용하여 급수의 합을 구할 수 있다.

일반적으로 급수를 정적분으로 나타내는 방법은 다음과 같다.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{pk}{n}\right)\frac{q}{n}=\frac{q}{p}\int_a^{a+p} f(x)dx$$

$$=\frac{q}{p}\int_0^p f(a+x)dx=q\int_0^1 f(a+px)dx$$

4

목표| 정적분을 이용하여 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^4+2^4+\cdots+n^4}{n^5}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k}{n}\right)^4\cdot\dfrac{1}{n}$

$f(x)=x^4$, $a=0$, $b=1$로 놓으면

$\varDelta x=\dfrac{b-a}{n}=\dfrac{1}{n}$, $x_k=a+k\varDelta x=\dfrac{k}{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4}{n^5}=\int_0^1 f(x)dx$

$=\int_0^1 x^4dx=\left[\dfrac{x^5}{5}\right]_0^1=\boldsymbol{\dfrac{1}{5}}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2+\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(1+\dfrac{n}{n}\right)^2\right\}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)^2\cdot\dfrac{1}{n}$

$f(x)=(1+x)^2$, $a=0$, $b=1$로 놓으면

$\varDelta x=\dfrac{b-a}{n}=\dfrac{1}{n}$, $x_k=a+k\varDelta x=\dfrac{k}{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2+\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(1+\dfrac{n}{n}\right)^2\right\}$

$=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(1+x)^2dx=\boldsymbol{\dfrac{7}{3}}$

단원 과제

목표| 구분구적법의 뜻을 정확히 이해하면 정적분에 관한 문제를 쉽게 해결할 수 있다. 이 단원 과제는 구분구적법의 이해를 돕기 위한 것이다.

풀이| (1) 위에서부터 k번째 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는

$\sqrt{r^2-\left(\dfrac{k}{n}r\right)^2}=\boldsymbol{r\sqrt{1-\left(\dfrac{k}{n}\right)^2}}$

(2) $\pi r^2\left\{1-\left(\dfrac{k}{n}\right)^2\right\}\cdot\dfrac{r}{n}=\boldsymbol{\dfrac{r^3}{n}\pi\left\{1-\left(\dfrac{k}{n}\right)^2\right\}}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{r^3}{n}\pi\left\{1-\left(\dfrac{k}{n}\right)^2\right\}$

$=\pi r^3\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left\{1-\left(\dfrac{k}{n}\right)^2\right\}\cdot\dfrac{1}{n}$

$=\pi r^3\int_0^1(1-x^2)dx=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}\pi r^3}$

중단원 기초

[해답 p.210]

수준별 학습

1 다음 등식을 만족시키는 함수 $f(x)$를 구하여라. (단, C는 상수)

(1) $\int f(x)dx=3x^2+7x+C$　　(2) $\int f(x)dx=-\frac{1}{3}x^3+2x+C$

01 부정적분

2 다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int x^5dx$　　(2) $\int (4x+5)dx$

(3) $\int (3x^2-2x+5)dx$　　(4) $\int \frac{x^3}{x+1}dx+\int \frac{1}{x+1}dx$

01 부정적분
부정적분의 성질

3 정적분의 정의에 의하여 다음 값을 구하여라.

(1) $\int_0^1 x\,dx$　　(2) $\int_0^2 x^3dx$

03 정적분
정적분의 정의

4 다음을 x에 대하여 미분하여라.

(1) $\int_0^x (2t^3+4)dt$　　(2) $\int_1^x (t-1)^3dt$

03 정적분
정적분과 미분의 관계

5 다음 정적분을 구하여라.

(1) $\int_0^1 (x^3-2x^2+4)dx$

(2) $\int_1^2 (x-1)(x^2+x+1)dx$

(3) $\int_{-1}^1 (x^2-x+1)dx+\int_{-1}^1 (x^2+x-1)dx$

(4) $\int_{-1}^2 (3x^2+2x-4)dx+\int_2^3 (3x^2+2x-4)dx$

04 정적분의 계산
정적분의 성질

중/단/원 기초

1

목표 | 함수 $f(x)$를 구할 수 있게 한다.

풀이 | (1) $\boldsymbol{f(x)=6x+7}$　　(2) $\boldsymbol{f(x)=-x^2+2}$

2

목표 | 부정적분의 성질을 이용할 수 있게 한다.

풀이 | (1) $\boldsymbol{\frac{1}{6}x^6+C}$　　(2) $\boldsymbol{2x^2+5x+C}$

(3) $\boldsymbol{x^3-x^2+5x+C}$

(4) $\int \frac{x^3}{x+1}dx+\int \frac{1}{x+1}dx=\int \frac{x^3+1}{x+1}dx$

$=\int \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)}dx$

$=\int (x^2-x+1)dx=\boldsymbol{\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x+C}$

(단, C는 적분상수)

3

목표 | 정적분의 정의를 이해하게 한다.

풀이 | (1) $a=0$, $b=1$이라 하면

$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n}$, $x_k=a+k\Delta x=\frac{k}{n}$

$f(x)=x_k=\frac{k}{n}$

$\int_0^1 x\,dx=\lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$

$=\lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(2) $a=0$, $b=2$라고 하면

$\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{2}{n}$, $x_k=a+k\Delta x=\frac{2k}{n}$

$f(x_k)=(x_k)^3=\left(\frac{2k}{n}\right)^3$

$\int_0^2 x^3dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2k}{n}\right)^3\frac{2}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{16}{n^4}\sum_{k=1}^{n}k^3$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{16}{n^4}\times\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2=\boldsymbol{4}$

4

목표 | 정적분과 미분과의 관계를 이해하게 한다.

풀이 | (1) $\boldsymbol{2x^3+4}$　　(2) $\boldsymbol{(x-1)^3}$

5

목표 | 정적분의 성질을 이용하여 정적분을 구할 수 있게 한다.

풀이 | (1) $\int_0^1 (x^3-2x^2+4)dx=\boldsymbol{\frac{43}{12}}$

(2) $\int_1^2 (x-1)(x^2+x+1)dx=\int_1^2 (x^3-1)dx$

$=\left[\frac{x^4}{4}-x\right]_1^2=\boldsymbol{\frac{11}{4}}$

(3) $\int_{-1}^1 (x^2-x+1)dx+\int_{-1}^1 (x^2+x-1)dx$

$=\int_{-1}^1 2x^2dx=\left[\frac{2}{3}x^3\right]_{-1}^1=\boldsymbol{\frac{4}{3}}$

(4) $\int_{-1}^2 (3x^2+2x-4)dx+\int_2^3 (3x^2+2x-4)dx$

$=\int_{-1}^3 (3x^2+2x-4)dx=\left[x^3+x^2-4x\right]_{-1}^3=\boldsymbol{20}$

교과서 168 쪽

중단원 기본

[해답 p.210]

수준별 학습

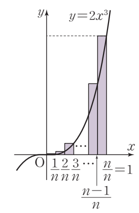
1 점 $(1,\ 3)$을 지나는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x,\ f(x))$에서의 접선의 기울기가 $2x+1$일 때, $f(x)$를 구하여라.

01 부정적분

2 다음은 곡선 $y=2x^3$과 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구분구적법으로 구하는 과정이다. □ 안에 알맞은 식을 써넣어라.

02 구분구적법

> 구간 $[0,\ 1]$을 n등분하면 양 끝 점과 각 분점의 x좌표는 차례로 $0,\ \frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \cdots,\ \frac{n-1}{n},\ 1$이므로 오른쪽 그림의 직사각형 넓이의 합을 S_n이라고 하면 구하는 넓이 S는
>
> $S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\boxed{}=\frac{1}{2}$



3 $f(x)=x^3-2x+5$일 때, 다음 극한값을 구하여라.

03 정적분

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_2^x f(t)\,dt$$

4 다음 정적분을 구하여라.

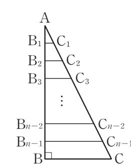
04 정적분의 계산
정적분의 성질

(1) $\int_{-2}^{1}|x+1|\,dx$ (2) $\int_{-1}^{3}|x^2-2x|\,dx$

(3) $\int_{-3}^{0}(x^2-5x)\,dx-\int_{3}^{0}(x^2-5x)\,dx$ (4) $\int_0^2\frac{x^2}{x-1}\,dx+\int_2^0\frac{1}{y-1}\,dy$

5 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=1$, $\angle B=90^\circ$인 직각삼각형 ABC가 있다. 오른쪽 그림과 같이 변 AB를 n등분한 점을 $B_1,\ B_2,\ B_3,\ \cdots,\ B_{n-1}$이라 하고, 각 점에서 선분 BC에 평행한 직선을 그어 변 AC와 만나는 점을 각각 $C_1,\ C_2,\ C_3,\ \cdots,\ C_{n-1}$이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\overline{B_kC_k}^3$의 값을 구하여라.

04 정적분의 계산
정적분과 급수의 관계



중/단/원 기본

1

목표| 부정적분을 구할 수 있게 한다.

풀이| $f'(x)=2x+1$이므로

$f(x)=\int(2x+1)\,dx=x^2+x+C$

점 $(1,\ 3)$을 지나므로 $3=1^2+1+C$, $C=1$

따라서 $\boldsymbol{f(x)=x^2+x+1}$

2

목표| 구분구적법의 뜻을 이해하게 한다.

풀이| $\left(\boldsymbol{\frac{k}{n}}\right)^3$

3

목표| 정적분을 구할 수 있게 한다.

풀이| $\int_2^x f(t)\,dt=\Big[F(t)\Big]_2^x=F(x)-F(2)$

$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\int_2^x f(t)\,dt$

$=\lim_{x\to 2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}$

$=F'(2)=f(2)=\mathbf{9}$

4

목표| 정적분의 성질을 이용하여 정적분을 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\int_{-2}^{1}|x+1|\,dx$

$=\int_{-2}^{-1}(-x-1)\,dx+\int_{-1}^{1}(x+1)\,dx=\frac{1}{2}+2=\boldsymbol{\frac{5}{2}}$

(2) $\int_{-1}^{3}|x^2-2x|\,dx$

$=\int_{-1}^{0}(x^2-2x)\,dx+\int_0^2(-x^2+2x)\,dx$

$+\int_2^3(x^2-2x)\,dx$

$=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\mathbf{4}$

(3) $\int_{-3}^{0}(x^2-5x)\,dx-\int_{3}^{0}(x^2-5x)\,dx$

$=\int_{-3}^{0}(x^2-5x)\,dx+\int_0^3(x^2-5x)\,dx$

$=\int_{-3}^{3}(x^2-5x)\,dx=\int_{-3}^{3}x^2\,dx-5\int_{-3}^{3}x\,dx$

$=18-5\times 0=\mathbf{18}$

(4) $\int_0^2\frac{x^2}{x-1}\,dx+\int_2^0\frac{1}{y-1}\,dy$

$=\int_0^2\frac{x^2}{x-1}\,dx-\int_0^2\frac{1}{x-1}\,dx$

$=\int_0^2\frac{x^2-1}{x-1}\,dx=\int_0^2(x+1)\,dx=\mathbf{4}$

5

목표| 극한값을 정적분으로 나타내어 구할 수 있게 한다.

풀이| $\overline{BC}=1$이고 $\overline{B_1C_1}=\frac{1}{n}\overline{BC}$, $\overline{B_2C_2}=\frac{2}{n}\overline{BC}$, $\cdots$,

$\overline{B_{n-1}C_{n-1}}=\frac{n-1}{n}\overline{BC}$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\overline{B_kC_k}^3$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\overline{BC}\right)^3+\left(\frac{2}{n}\overline{BC}\right)^3+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\overline{BC}\right)^3\right\}$

$=\overline{BC}^3\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^4}\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2=1\times\frac{3}{4}=\boldsymbol{\frac{3}{4}}$

교과서 169 쪽

중단원 실력

[해답 p.210]

수준별 학습

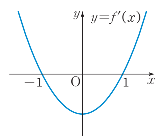
1 함수 $f(x)=x^{10}+x^9+x^8+\cdots+x+1$에 대하여

$$F(x)=\int \frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)dx\right\}\right]dx$$

이고 $F(0)=3$일 때, $F(2)$의 값을 구하여라.

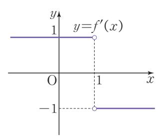
01 부정적분

2 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같은 이차함수이고, $f(x)$의 극댓값이 6, 극솟값이 -2일 때, 함수 $f(x)$를 구하여라.



01 부정적분
부정적분의 성질

3 함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같고, 등식 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=3$이 성립할 때, $\int_0^3 f(x)dx$의 값을 구하여라.



03 정적분
미적분의 기본 정리

4 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근이 α, $\beta(\alpha<\beta)$라고 할 때,

$$\int_\alpha^\beta (ax^2+bx+c)dx=-\frac{a(\beta-\alpha)^3}{6}$$

이 성립함을 증명하여라.

04 정적분의 계산
정적분의 성질

5 연속함수 $f(x)$에 대하여 $\int_k^{k+1}f(x)dx=k^2$이 성립할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\int_1^n f(x)dx$의 값을 구하여라. (단, n은 자연수이다.)

04 정적분의 계산
정적분과 급수의 관계

중/단/원 실력

1

목표| 주어진 조건을 만족시키는 부정적분을 구할 수 있다.

풀이| $F(x)=f(x)+C$ (단, C는 적분상수)에서

$F(x)=x^{10}+x^9+x^8+\cdots+x+1+C$

$F(0)=3$이므로 $C=2$

$F(x)=x^{10}+x^9+x^8+\cdots+x+3$이므로

$F(2)=2^{10}+2^9+2^8+\cdots+2^2+2+3=\mathbf{2049}$

2

목표| 부정적분의 성질을 이용하여 부정적분을 구할 수 있게 한다.

풀이| $f'(x)=a(x+1)(x-1)=ax^2-a$ $(a>0)$라고 하면 $f(x)=\int(ax^2-a)dx=\frac{1}{3}ax^3-ax+C$

(단, C는 적분상수)

극댓값이 $f(-1)=\frac{2}{3}a+C=6$ …… ①

극솟값이 $f(1)=-\frac{2}{3}a+C=-2$ …… ②

①, ②를 연립하여 풀면 $a=6$, $C=2$

따라서 $\boldsymbol{f(x)=2x^3-6x+2}$

3

목표| 미적분의 기본 정리를 이해하고 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| $f'(x)=\begin{cases}1 & (x<1)\\ -1 & (x>1)\end{cases}$ 이므로

$f(x)=\begin{cases}x+C_1 & (x<1)\\ -x+C_2 & (x>1)\end{cases}$

(단, C_1, C_2는 적분상수)

$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)$이므로

$3=1+C_1=-1+C_2$에서 $C_1=2$, $C_2=4$

$f(x)=\begin{cases}x+2 & (x\le1)\\ -x+4 & (x\ge1)\end{cases}$ 이므로

$$\int_0^3 f(x)dx=\int_0^1(x+2)dx+\int_1^3(-x+4)dx$$
$$=\mathbf{\frac{13}{2}}$$

4

목표| 정적분의 성질을 이용하여 정적분을 구할 수 있게 한다.

풀이| $ax^2+bx+c=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}$ $(\alpha<\beta)$ 이므로

$$\int_\alpha^\beta(ax^2+bx+c)dx=\int_\alpha^\beta a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}dx$$
$$=\left[a\left\{\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x\right\}\right]_\alpha^\beta$$
$$=-\frac{a(\beta-\alpha)^3}{6}$$

5

목표| 극한값을 정적분으로 나타내어 구할 수 있게 한다.

풀이| $\int_1^n f(x)dx$

$=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx+\int_3^4 f(x)dx+\cdots+\int_{n-1}^n f(x)dx$

$=1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2=\sum_{k=1}^{n-1}k^2$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\int_1^n f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n-1}k^2=\int_0^1 x^2dx=\mathbf{\frac{1}{3}}$$

2 정적분의 활용

중단원을 시작하며

이번 중단원에서는 다음 내용을 지도한다.

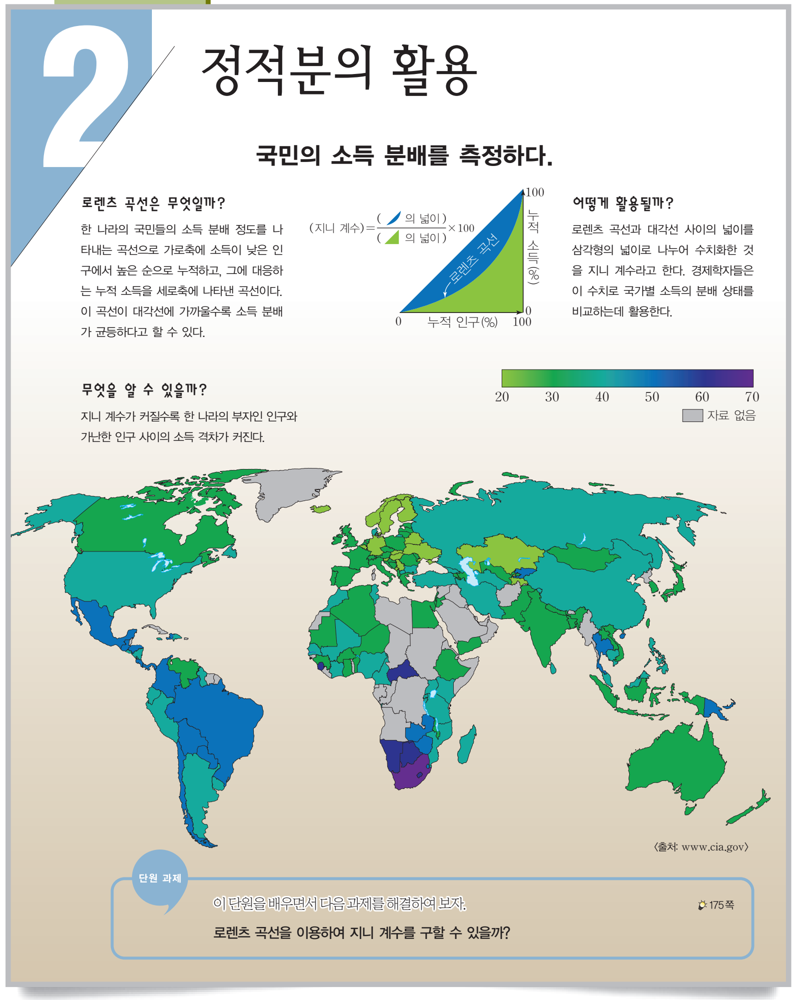
① 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

② 정적분을 이용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있게 한다.

중단원의 구성

소단원명	지도 내용
01 넓이	곡선과 x축 사이의 넓이
	두 곡선 사이의 넓이
02 속도와 거리	속도와 거리
수준별 학습	중단원 확인 학습 문제

교과서 170 쪽



성취 기준과 성취 수준

성취 기준		성취 수준
1. 넓이	상	정적분을 이용하여 넓이와 관련된 다양한 실생활 문제를 해결할 수 있다.
	중	곡선과 직선, 곡선과 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
	하	정적분을 구할 수 있다.
2. 속도와 거리	상	정적분을 이용하여 속도와 거리에 관련된 다양한 실생활 문제를 해결할 수 있다.
	중	정적분으로 속도와 거리를 구할 수 있다.
	하	거리를 미분하면 속도이고 속도를 적분하면 거리가 됨을 이해할 수 있다.

들어가면서 정적분의 정의는 주어진 구간에서 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이로부터 비롯되었으므로 넓이와 깊은 관련이 있다. 정적분을 이용하면 곡선과 x축 사이의 넓이, 곡선과 y축 사이의 넓이뿐만 아니라 두 곡선 사이의 넓이도 구할 수 있다. 속도와 가속도는 각각 이동 거리와 속도의 미분이므로 이를 다시 적분하여 이동 거리와 속도를 구할 수 있다. 일상생활의 여러 가지 문제를 해결할 때도 유용한 도구가 되기도 하는데 곡선 모양으로 나누어진 토지의 구획 정리, 포물선 모양의 간척지 개발에서의 넓이, 둥근 포도주 통의 부피, 곡선의 산책로의 포장 문제, 자유 낙하 운동에서의 물체의 속도와 높이 외에 첨단 분야 등 다양한 상황에서 활용되고 있다.

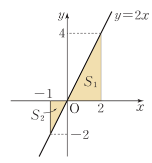
교과서 171 쪽

01 넓이

● 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.

곡선과 x축 사이의 넓이는 어떻게 구하는가?

탐구 활동 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=2x$와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 직선 $y=2x$와 x축 및 직선 $x=-1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.

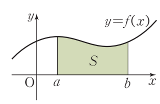


1. 넓이 S_1을 구하고, $\int_0^2 2x\,dx$의 값과 비교하여 보자.
2. 넓이 S_2를 구하고, $\int_{-1}^0 2x\,dx$의 값과 비교하여 보자.

함수 $y=f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구하여 보자.

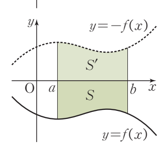
(i) 구간 $[a, b]$에서 $f(x)\geq 0$일 때
넓이 S는 정적분의 정의에 의하여

$$S=\int_a^b f(x)dx$$



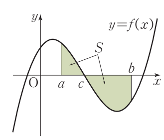
(ii) 구간 $[a, b]$에서 $f(x)\leq 0$일 때
넓이 S는 곡선 $y=f(x)$를 x축에 대하여 대칭이동시킨 곡선 $y=-f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S'과 같으므로

$$S=\int_a^b \{-f(x)\}dx=\int_a^b |f(x)|dx$$



❶ (iii) 구간 $[a, c]$에서 $f(x)\geq 0$이고, 구간 $[c, b]$에서 $f(x)\leq 0$일 때

$$S=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b \{-f(x)\}dx$$
$$=\int_a^c |f(x)|dx+\int_c^b |f(x)|dx$$
$$=\int_a^b |f(x)|dx$$



탐구 활동의 이해

활동 목표 • $f(x)\geq 0$인 구간에서는 정적분의 값이 도형의 넓이임을 알게 하고 $f(x)\leq 0$인 구간에서는 정적분이 음의 부호를 가진 넓이임을 알게 하여 정적분을 이용하여 넓이를 구하는 방법을 생각해 보도록 지도한다.

1. 넓이 $S_1=\frac{1}{2}\times 2\times 4=4$,

$\int_0^2 2x\,dx=\Big[x^2\Big]_0^2=4$,

$\boldsymbol{S_1=\int_0^2 2x\,dx}$

2. 넓이 $S_2=\frac{1}{2}\times 1\times 2=1$,

$\int_{-1}^0 2x\,dx=\Big[x^2\Big]_{-1}^0=-1$,

$\boldsymbol{S_2=-\int_{-1}^0 2x\,dx}$

01 넓이

소단원 지도 목표

① 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있다.
② 두 곡선 사이의 넓이를 구할 수 있다.

교수 · 학습상의 유의점

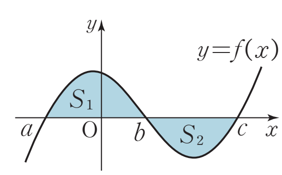
1. 곡선과 x축 사이의 넓이를 구할 때는 함숫값이 양인 경우와 음인 경우로 나누어 이해하게 하고, 이를 일반화한다.

2. x가 y의 함수로 주어진 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 개념을 이해시키는 정도로 가볍게 다룬다.

3. 주어진 곡선의 개형을 그리고, 구하는 넓이가 어느 영역인가를 확인한 후 적분할 구간을 정하도록 지도한다.

본문 해설

❶ 함수 $y=f(x)$가 $a\leq x\leq b$이면 $f(x)\geq 0$, $b\leq x\leq c$이면 $f(x)\geq 0$일 때, 구간 $[a,\ b]$와 $[b,\ c]$에서 곡선 $y=f(x)$와 x축 사이의 도형의 넓이를 각각 S_1, S_2라고 하면



$$S_1=\int_a^b f(x)dx$$

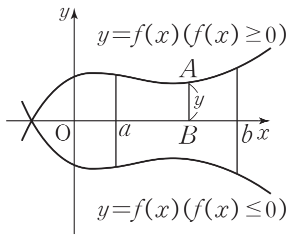
$$S_2=\int_b^c \{-f(x)\}dx$$

따라서 곡선 $y=f(x)$와 x축 사이의 도형의 넓이는 S_1+S_2이고,

$$S_1+S_2=\int_a^b |f(x)|dx+\int_b^c |f(x)|dx$$
$$=\int_a^c |f(x)|dx$$

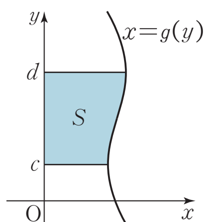
본문 해설

❶ 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)$의 부호에 관계없이 $\overline{\mathrm{AB}}=|f(x)|$이다.



따라서 $S=\int_a^b |f(x)|\,dx$

또, 함수 $x=g(y)$가 닫힌 구간 $[c,\ d]$에서 연속일 때, 곡선 $x=g(y)$와 y축 및 두 직선 $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 $S=\int_c^d |g(y)|\,dy$



교과서 172 쪽

이상을 정리하면 다음과 같다.

❶ **곡선과 x축 사이의 넓이**

함수 $y=f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)|\,dx$$

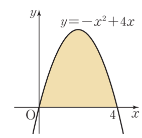
예제 01 다음 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y=-x^2+4x$, x축

(2) $y=x^2-4x$, x축, $x=-1$, $x=2$

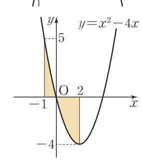
풀이 (1) 주어진 곡선은 오른쪽 그림과 같이 구간 $[0,\ 4]$에서 $y\ge0$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_0^4(-x^2+4x)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^4=\frac{32}{3}$$



(2) 주어진 곡선은 오른쪽 그림과 같이 구간 $[-1,\ 0]$에서 $y\ge0$이고, 구간 $[0,\ 2]$에서 $y\le0$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^0(x^2-4x)\,dx+\int_0^2(-x^2+4x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2\right]_{-1}^0+\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^2=\frac{23}{3}$$



답 (1) $\frac{32}{3}$ (2) $\frac{23}{3}$

문제 1 다음 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y=(x+1)(x-2)$ (2) $y=x^3-x^2-2x$

문제 2 다음 곡선과 x축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

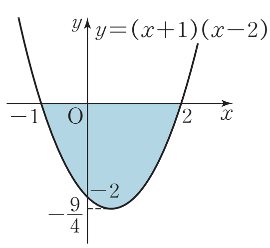
(1) $y=x^2-2x$ (2) $y=x^3-3x^2+2x$

1

목표| 곡선과 x축 사이의 넓이를 구할 수 있게 한다.

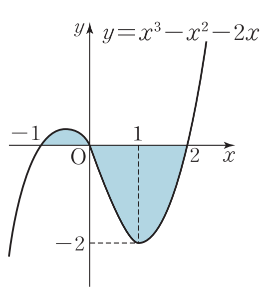
풀이| (1) S

$$=\int_{-1}^2(x+1)(x-2)\,dx$$
$$=-\int_{-1}^2(x^2-x-2)\,dx$$
$$=-\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x\right]_{-1}^2$$
$$=\mathbf{\frac{9}{2}}$$



(2) $S=\int_{-1}^0(x^3-x^2-2x)\,dx$

$$-\int_0^2(x^3-x^2-2x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-1}^0$$
$$-\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{x^3}{3}-x^2\right]_0^2$$
$$=\mathbf{\frac{37}{12}}$$

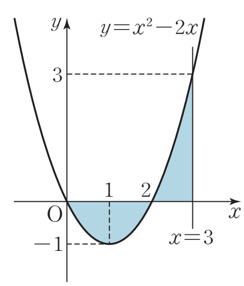


2

목표| 함수값이 양, 음인 경우로 나누어 계산할 수 있게 한다.

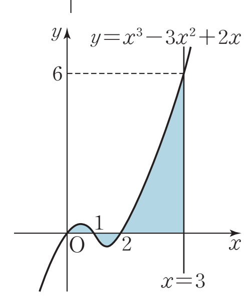
풀이| (1) S

$$=-\int_0^2(x^2-2x)\,dx$$
$$+\int_2^3(x^2-2x)\,dx$$
$$=-\left(-\frac{4}{3}\right)+\frac{4}{3}=\mathbf{\frac{8}{3}}$$



(2) $S=\int_0^1(x^3-3x^2+2x)\,dx$

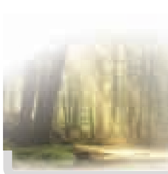
$$-\int_1^2(x^3-3x^2+2x)\,dx$$
$$+\int_2^3(x^3-3x^2+2x)\,dx$$
$$=\frac{1}{4}-\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{9}{4}=\mathbf{\frac{11}{4}}$$



교과서 173 쪽

두 곡선 사이의 넓이는 어떻게 구하는가?

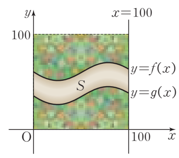
탐구 활동



오른쪽 그림은 한 변의 길이가 100 m인 정사각형 모양의 공원을 좌표평면 위에 나타낸 것이다. 이 공원 안에 있는 산책로의 경계선을 나타내는 식을 각각 $y=f(x)$, $y=g(x)$라고 할 때, 다음 물음에 답하여 보자.

1. 산책로의 넓이를 S라고 할 때, S를 구하는 방법을 말하여 보자.

2. 산책로의 넓이 S를 정적분을 이용하여 나타내어 보자.



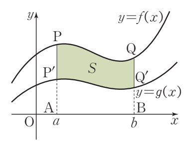
이제 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하는 방법을 알아보자.

두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구하여 보자.

❶ (i) 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)\geq g(x)\geq 0$일 때

넓이 S는 도형 PABQ의 넓이에서 도형 P′ABQ′의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$$S=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$$
$$=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$

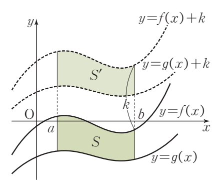


(ii) 구간 $[a,\ b]$에서 $f(x)\geq g(x)$이고 $f(x)$ 또는 $g(x)$가 음의 값을 가질 때

오른쪽 그림과 같이 두 곡선을 y축의 방향으로 k만큼 평행이동하여

$$f(x)+k\geq g(x)+k\geq 0$$

이 되게 할 수 있다.



따라서 넓이 S는 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동시킨 곡선 $y=f(x)+k$와 $y=g(x)+k$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S'과 같으므로

$$S=\int_a^b [\{f(x)+k\}-\{g(x)+k\}]dx$$
$$=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$

탐구 활동의 이해

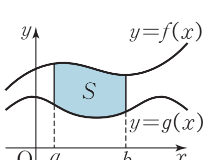
활동 목표 • 산책로의 넓이를 구하는 방법을 정적분의 도형의 넓이를 구하는 방법을 통하여 이해하게 한다.

1. 산책로의 넓이 S는 곡선 $y=f(x)$와 x축 사이의 넓이에서 곡선 $y=g(x)$와 x축 사이의 넓이를 빼서 구한다.

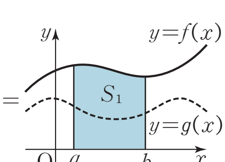
2. $S=\int_0^{100} f(x)dx-\int_0^{100} g(x)dx$

본문 해설

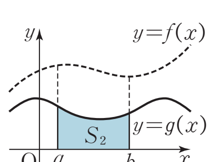
❶



$=$



$-$

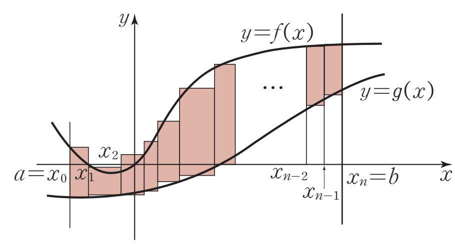


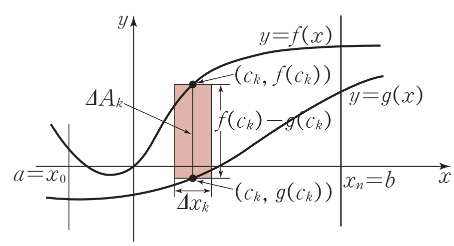
위의 그림에서 $S=S_1-S_2$이고, 이것을 식으로 나타내면

$$S=S_1-S_2=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$$

지/도/자/료

좌표평면에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(x)\geq g(x)$일 때, $x=a$, $x=b$와 두 곡선으로 둘러싸인 넓이를 구해 보자. 넓이의 근삿값을 구하기 위해 우선 구간 $[a,\ b]$의 n분할 $P=\{x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n\}$을 기초로 한 n개의 직사각형을 만들 수가 있다.





이때, k번째의 직사각형의 넓이 ΔA_k는 다음과 같다.

$\Delta A_k=$(높이)$\times$(밑변)$=\{f(c_k)-g(c_k)\}\Delta x_k$

이 직사각형들의 넓이의 합에 의한 곡선들 사이의 넓이는 다음과 같이 리만합으로 표현할 수 있다.

$$A\approx\sum_{k=1}^{n}\Delta A_k=\sum_{k=1}^{n}\{f(c_k)-g(c_k)\}\Delta x_k$$

$\|P\|\to 0$이면 위 식의 오른쪽 항은 함수 f, g가 연속이므로 극한 $\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx$로 접근한다.

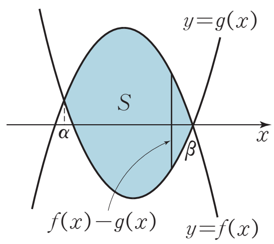
즉, 이 적분의 값으로 곡선들로 둘러싸인 영역의 넓이를 얻을 수 있다.

$$A=\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\{f(c_k)-g(c_k)\}\Delta x_k=\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx$$

본문 해설

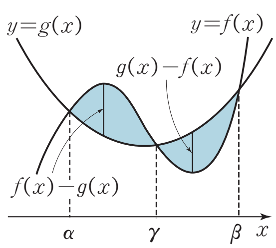
❶ 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구하여 보자. 이때, 방정식 $f(x)=g(x)$를 풀어 교점의 x좌표를 구한 후 적분 구간을 정한다.

(1) $f(x)=g(x)$의 근이 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$이고 구간 $[\alpha, \beta]$에서 $f(x)\ge g(x)$인 경우



$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\{f(x)-g(x)\}dx$$
$$=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)-g(x)|dx$$

(2) $f(x)=g(x)$의 근이 $x=\alpha$ 또는 $x=\beta$ 또는 $x=\gamma$이고 구간 $[\alpha, \gamma]$에서 $f(x)\ge g(x)$ $[\gamma, \beta]$에서 $f(x)\le g(x)$인 경우



$$S=\int_{\alpha}^{\gamma}\{f(x)-g(x)\}dx+\int_{\gamma}^{\beta}\{g(x)-f(x)\}dx$$
$$=\int_{\alpha}^{\gamma}|f(x)-g(x)|dx+\int_{\gamma}^{\beta}\{f(x)-g(x)\}dx$$
$$=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)-g(x)|dx$$

교과서 174 쪽

(iii) 구간 $[a, b]$에서 $f(x)\le g(x)$일 때, 넓이 S는 앞의 (i), (ii)와 같은 방법으로

$$S=\int_{a}^{b}\{g(x)-f(x)\}dx$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

❶ **두 곡선 사이의 넓이**

두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때, 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_{a}^{b}|f(x)-g(x)|dx$$

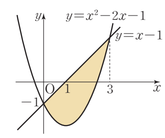
예제 02 다음 곡선과 직선 또는 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y=x^2-2x-1$, $y=x-1$ (2) $y=-x^2+5x-6$, $y=x^2-3x$

풀이 (1) 주어진 곡선과 직선의 교점의 x좌표를 구하면

$x^2-2x-1=x-1$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

이때 구간 $[0, 3]$에서 $x-1\ge x^2-2x-1$이므로 구하는 넓이 S는

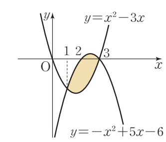


$$S=\int_{0}^{3}\{(x-1)-(x^2-2x-1)\}dx$$
$$=\int_{0}^{3}(-x^2+3x)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{3}=\frac{9}{2}$$

(2) 주어진 두 곡선의 교점의 x좌표를 구하면

$-x^2+5x-6=x^2-3x$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

이때 구간 $[1, 3]$에서 $-x^2+5x-6\ge x^2-3x$이므로 구하는 넓이 S는



$$S=\int_{1}^{3}\{(-x^2+5x-6)-(x^2-3x)\}dx$$
$$=-2\int_{1}^{3}(x^2-4x+3)dx=-2\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right]_{1}^{3}=\frac{8}{3}$$

답 (1) $\frac{9}{2}$ (2) $\frac{8}{3}$

문제 3 다음 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y=x^2+1$, $y=2x+4$ (2) $y=-x^2-2x$, $y=x-4$

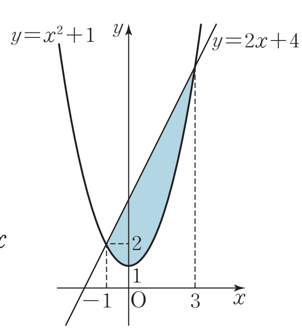
문제 4 다음 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y=x^2-1$, $y=-x^2+4x+5$ (2) $y=x^3+2x^2-2$, $y=-x^2+2$

3

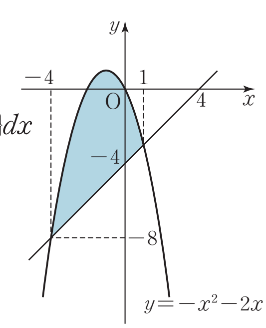
목표| 두 곡선의 교점을 구하여 적분 구간을 결정할 수 있게 한다.

풀이| (1) 구간 $[-1, 3]$에서 $2x+4\ge x^2+1$이므로



$$S=\int_{-1}^{3}\{(2x+4)-(x^2+1)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)dx$$
$$=9-\left(-\frac{5}{3}\right)=\mathbf{\frac{32}{3}}$$

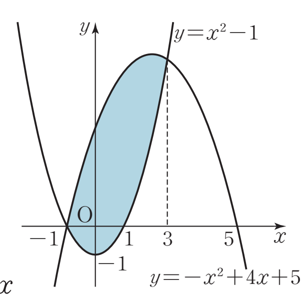
(2) 구간 $[-4, 1]$에서 $-x^2-2x>x-4$이므로



$$S=\int_{-4}^{1}\{(-x^2-2x)-(x-4)\}dx$$
$$=\int_{-4}^{1}(-x^2-3x+4)dx$$
$$=\frac{13}{6}-\left(-\frac{56}{3}\right)=\mathbf{\frac{125}{6}}$$

4

풀이| (1) 구간 $[-1, 3]$에서 $-x^2+4x+5\ge x^2-1$이므로

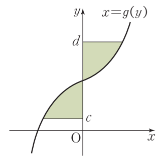


$$S=\int_{-1}^{3}\{(-x^2+4x+5)-(x^2-1)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{3}(-2x^2+4x+6)dx$$
$$=18-\left(-\frac{10}{3}\right)=\mathbf{\frac{64}{3}}$$

(2) 구간 $[-2, 1]$에서 $-x^2+2\ge x^3+2x^2-2$이므로

❶ 도형의 넓이를 구할 때, 도형의 모양에 따라 y에 대하여 적분하는 것이 편리한 경우가 있다. x가 y의 함수로 주어진 경우 도형의 넓이를 구하여 보자.

이와 같은 함수 $x=g(y)$가 구간 $[c,\ d]$에서 연속일 때, 곡선 $x=g(y)$와 y축 및 두 직선 $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 다음과 같다.



$$S=\int_c^d |g(y)|dy$$

보기 곡선 $x=y^2$과 y축 및 두 직선 $y=1$, $y=3$으로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_1^3 y^2dy=\left[\frac{y^3}{3}\right]_1^3=\frac{26}{3}$$

문제 5 다음 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

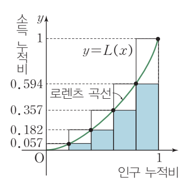
(1) $x=y^2-2y$, y축, $y=1$, $y=3$ (2) $x=y^2$, $x=y+2$

단원 과제

앞의 단원 과제에 대하여 다음을 해결하여 보자.

다음은 2011년 5월 통계청에서 발표한 우리나라의 소득 점유율을 나타낸 것이다. 이 자료를 바탕으로 로렌츠 곡선을 그리면 오른쪽과 같다.

소득 분위	1분위	2분위	3분위	4분위	5분위
월평균 소득(천 원)	1106.3	2409.6	3370.9	4568.3	7831.3
소득 점유율(%)	5.7	12.5	17.5	23.7	40.6
누적비	0.057	0.182	0.357	0.594	1



컴퓨터를 이용하여 로렌츠 곡선을 다항식으로 나타내면 그 식 $L(x)$는

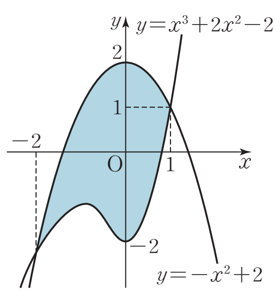
$$L(x)=2.0x^5-3.3x^4+1.6x^3+0.5x^2+0.1x\ (0\le x\le 1)$$

와 같다. 이 식을 이용하여 우리나라의 지니 계수를 구하여라. (단, $L(x)$의 계수는 소수 둘째 자리에서 반올림한 것이다.)

$$S=\int_{-2}^{1}\{(-x^2+2)-(x^3+2x^2-2)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{1}(-x^3-3x^2+4)dx$$

$$=\frac{11}{4}-(-4)=\mathbf{\frac{27}{4}}$$

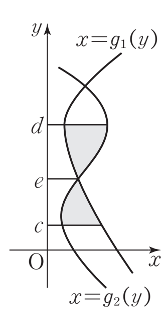


본문 해설

❶ 두 곡선 $x=g_1(y)$, $x=g_2(y)$와 두 직선 $y=c$, $y=d$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는 다음과 같다.

$$S=\int_c^d |g_1(y)-g_2(y)|dy$$

$$=\int_c^e |g_1(y)-g_2(y)|dy+\int_e^d |g_1(y)-g_2(y)|dy$$



5

목표| x가 y의 함수로 주어진 경우 도형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

(1) $x=y^2-2y$

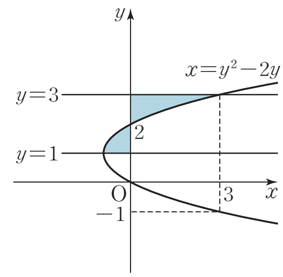
$=y(y-2)$에서

$y=0$ 또는 $y=2$

구간 $[0,\ 2]$에서

$x\le 0$이므로

구하는 넓이 S는



$$S=\int_1^3 (y^2-2y)dy$$

$$=-\int_1^2 (y^2-2y)dy+\int_2^3 (y^2-2y)dy$$

$$=-\left[\frac{1}{3}y^3-y^2\right]_1^2+\left[\frac{1}{3}y^3-y^2\right]_2^3$$

$$=-\left(-\frac{2}{3}\right)+\frac{4}{3}=\mathbf{2}$$

(2) $y^2=y+2$에서

y^2-y-2

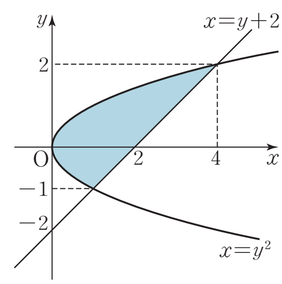
$=(y-2)(y+1)$

$=0$

$y=-1$ 또는

$y=2$

구간 $[-1,\ 2]$



에서 $y^2\le y+2$이므로 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^{2}\{(y+2)-y^2\}dx$$

$$=\int_{-1}^{2}(-y^2+y+2)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{2}y^2+2y\right]_{-1}^{2}$$

$$=\frac{10}{3}-\left(-\frac{7}{6}\right)=\frac{27}{6}=\mathbf{\frac{9}{2}}$$

단원 과제

목표| 지니 계수를 구하면 국가별 소득의 분배 상태를 알 수 있다. 이와 같이 실생활 문제를 정적분을 이용하여 해결하는 예를 통하여 정적분의 필요성과 중요성을 알게 한다.

풀이| 컴퓨터를 이용하여 계산하면

$\int_0^1 \{x-L(x)\}dx=0.21$이므로

우리나라의 지니 계수는 $\dfrac{0.21}{\dfrac{1}{2}}\times 100=\mathbf{42}$

02 속도와 거리

소단원 지도 목표

① 정적분을 활용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있게 한다.

교수 · 학습상의 유의점

1. 수직선 위를 움직이는 물체의 경우 위치를 시각에 대하여 미분한 것이 그 시각에서의 속도임에 유의한다.

2. 운동 거리는 운동 방향과 관계없이 이동한 거리이므로 속력(속도의 절댓값)과 관계가 있음을 이해시킨다.

3. 속도가 v이고 $t=a$일 때의 위치가 x_0이면 $t=b$일 때의 위치 x는 $\int_a^b vdt$가 아니라 $x=x_0+\int_a^b vdt$임을 강조한다.

교과서 176 쪽

02 속도와 거리

● 정적분을 활용하여 속도와 거리에 대한 문제를 해결할 수 있다.

정적분을 활용하여 속도와 거리를 어떻게 구하는가?

생각 열기 안전거리

자동차를 운전할 때 운전자가 브레이크를 밟는 순간부터 자동차가 정지할 때까지의 거리를 제동 거리라고 한다. 고속 국도의 차 간 안전거리는 위험을 인식하고 브레이크가 실제로 작동하기까지 움직인 거리인 공주 거리와 제동 거리를 고려하여 정한다.

탐구 활동 **직선 도로 위를 매초 30 m의 속도로 달리던 자동차가 제동을 걸기 시작하여 t초 후의 위치가 $x(t)=30t-5t^2$(m)일 때, 다음 물음에 답하여 보자.**

1. t초 후의 속도 $v(t)$를 구하여 보자.

2. $\int_0^3 v(t)dt$의 값을 구하고, $t=3$일 때의 자동차의 위치와 비교하여 보자.

1 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 주어졌을 때, 점 P의 위치 $x=f(t)$를 구하여 보자.

$v(t)=\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$이므로 시각 t_0에서의 점 P의 위치를 $f(t_0)=x_0$이라고 하면

$$\int_{t_0}^{t} v(t)dt=f(t)-f(t_0)=x-x_0$$

이다. 따라서 시각 t에서의 점 P의 위치 x는

$$x=x_0+\int_{t_0}^{t} v(t)dt$$

이고, 또 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f(b)-f(a)&=\left\{x_0+\int_{t_0}^{b} v(t)dt\right\}-\left\{x_0+\int_{t_0}^{a} v(t)dt\right\} \\ &=\int_{t_0}^{b} v(t)dt-\int_{t_0}^{a} v(t)dt=\int_a^b v(t)dt \end{aligned}$$

● 위치 $\underset{\text{적분}}{\overset{\text{미분}}{\rightleftarrows}}$ 속도

생각 열기 참/고/자/료

안전거리는 앞차가 제동기의 제동력에 의하여 정지한 경우뿐만 아니라 제동기 이외의 작용에 의하여 갑자기 정지한 경우의 충돌을 피할 만한 필요한 거리를 말한다. 특히 안전거리 미확보로 앞차를 추돌한 경우 도로교통법 위반행위이므로 자동차를 운전할 때는 반드시 안전거리를 지켜야 한다.

탐구 활동의 이해

활동 목표 • 자동차의 이동 거리를 미분하여 속도를 구하고, 다시 속도를 적분하여 그것이 처음의 이동 거리와 일치함을 확인하게 하여 속도와 거리의 관계를 짐작하게 한다.

1. $v(t)=x'(t)=(30t-5t^2)'=\mathbf{30-10t(m/s)}$

2. $\int_0^3 (30-10t)dt=\Big[30t-5t^2\Big]_0^3=\mathbf{90-45=45(m)}$, $t=3$일 때의 자동차의 위치는 45 m이므로 **서로 같다.**

본문 해설

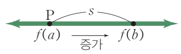
1 움직이는 물체의 t초 후의 위치가 $x=s(t)$일 때, 속도 $v(t)=\dfrac{dx}{dt}=s'(t)$임을 알고 정적분을 이용하여 $s(t)$를 구해 봄으로써 속도와 거리의 문제에 적분을 활용함을 알게 한다.

교과서 177 쪽

❶ 이제 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 수직선 위에서 점 P가 움직인 거리, 즉 경과 거리 s를 구하여 보자.

(i) $v(t)>0$일 때

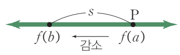
점 P의 위치 $x=f(t)$는 증가하므로 수직선의 양의 방향으로 움직인다. 따라서 점 P가 움직인 거리 s는 시각 $t=b$일 때의 위치 $f(b)$에서 시각 $t=a$일 때의 위치 $f(a)$를 뺀 것과 같다.



$$s=f(b)-f(a)=\int_a^b v(t)dt$$

(ii) $v(t)<0$일 때

점 P의 위치 $x=f(t)$는 감소하므로 수직선의 음의 방향으로 움직인다. 따라서 점 P가 움직인 거리 s는 시각 $t=a$일 때의 위치 $f(a)$에서 시각 $t=b$일 때의 위치 $f(b)$를 뺀 것과 같다.



$$s=f(a)-f(b)=\int_b^a v(t)dt=-\int_a^b v(t)dt$$

(i), (ii)에 의하여 $s=\int_a^b |v(t)|dt$

이상을 정리하면 다음과 같다.

❷ **속도와 거리**

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$, 시각 t_0에서의 점 P의 위치를 x_0이라고 하면

(1) 시각 t에서의 점 P의 위치: $x=x_0+\int_{t_0}^t v(t)dt$

(2) 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량: $\int_a^b v(t)dt$

(3) 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리: $s=\int_a^b |v(t)|dt$

보기 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)=3t^2-6t$일 때

(1) 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량

$$\int_0^3 (3t^2-6t)dt=\Big[t^3-3t^2\Big]_0^3=0$$

(2) 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리

$v(t)=3t^2-6t=3t(t-2)$이므로 구간 $[0,\ 2]$에서 $v(t)\le0$이고, 구간 $[2,\ 3]$에서 $v(t)\ge0$이다. 따라서 움직인 거리 s는

$$s=\int_0^2(-3t^2+6t)dt+\int_2^3(3t^2-6t)dt$$
$$=\Big[-t^3+3t^2\Big]_0^2+\Big[t^3-3t^2\Big]_2^3=8$$

본문 해설

❶ 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 좌표를 $x(t)$라 할 때, 속도는 $v(t)=x'(t)$이다. 이때 P는 $v(t)>0$이면 x축의 양의 방향으로, $v(t)<0$이면 x축의 음의 방향으로 움직인다. 만일

$a\le t\le c$일 때 $v(t)\ge0$이고

$c\le t\le b$일 때 $v(t)<0$이면

시각이 a에서 b까지 변할 때 점 P의 이동 거리는 다음과 같다.

$$\int_a^c v(t)dt+\int_c^b(-v(t))dt$$
$$=\int_a^c |v(t)|dt+\int_c^b |v(t)|dt$$
$$=\int_a^b |v(t)|dt$$

❷ 수직선 위를 물체의 시각 t에서의 위치 $x(t)$를 t에 대하여 미분하면 $x'(t)=v(t)$이다.

따라서 $x(t)$는 $v(t)$의 한 부정적분이므로 다음이 성립한다.

$$x(t)=x(a)+\int_a^t v(t)dt$$

이때, $t=b$를 대입하면

$$\int_a^b v(t)dt=x(b)-x(a)$$

이므로 시각 $t=a$에서 $t=b$까지의 물체의 위치의 변화량은

$$x(b)-x(a)=\int_a^b v(t)dt$$

이다.

그러나 물체가 움직인 거리는 속력을 적분한 것으로 물체의 위치나 위치의 변화량과는 다를 수도 있다.

지/도/자/료 움직인 거리, 위치, 위치의 변화량

1. 직선 운동을 하는 점 P의 시각 t에서의 속도 v가 $v=f(t)$로 주어질 때, 점 P가 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 이동한 거리 s는 구분구적법과 같은 방법으로 시간 $b-a$를 n등분하여 (거리)=(속도)×(시간)이라는 관계식을 이용하여 구한다.

n등분된 부분 거리 $\varDelta s$는 $\varDelta s=f(t_k)\varDelta t$이므로 전체 거리는

$s=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f(t_k)\varDelta t$, 즉 $s=\int_a^b f(t_k)dt$

와 같이 정적분으로 나타낸다.

2. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치가 $x=f(t)$라고 할 때, 시각 t에서의 점 P의 속도 $v=\dfrac{dx}{dt}$임을 미분법에서 배웠다.

따라서 $x=f(t)$는 v의 부정적분이며 $x=\int vdt$

그러므로 $\int_a^b vdt=\Big[f(t)\Big]_a^b=f(b)-f(a)$가 되어 $\int_a^b vdt$가 시각 a에서 b까지 위치의 변화량임을 이해시킨다.

1

목표| 시각 t에서의 위치는 속도를 적분하여 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $1+\int_{0}^{2}(t^2-3t+2)dt$

$$=1+\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+2t\right]_0^2=1+\frac{2}{3}=\mathbf{\frac{5}{3}}$$

(2) 물체의 위치의 변화량은

$$\int_{1}^{3}(t^2-3t+2)dt=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+2t\right]_1^3$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{5}{6}=\mathbf{\frac{2}{3}}$$

(3) $v(t)=t^2-3t+2=(t-1)(t-2)=0$에서

$1\le t\le 2$일 때 $v(t)\le 0$,

$t\ge 2$일 때 $v(t)\ge 0$이다.

$$-\int_{1}^{2}(t^2-3t+2)dt+\int_{2}^{3}(t^2-3t+2)dt$$

$$=-\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+2t\right]_1^2+\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+2t\right]_2^3$$

$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)+\frac{5}{6}=\mathbf{1}$$

2

목표| 정적분을 이용하여 실생활에서 속도와 거리의 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 열차가 정지하면 $v(t)=0$이므로

$60-3t=0$, $t=\mathbf{20}$**(초)**

따라서 열차가 정지할 때까지 걸린 시간은 20초이고 움직인 거리는

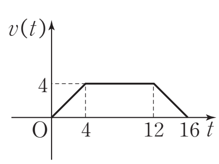
$$s(t)=\int_{0}^{20}v(t)dt=\int_{0}^{20}(60-3t)dt$$

$$=\left[60t-\frac{3}{2}t^2\right]_0^{20}=\mathbf{600(m)}$$

사고력 기르기 문제 해결

출제 의도| 정적분을 이용하여 실생활에서 속도와 거리 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 엘리베이터의 속도를 v라고 하면



$$v(t)=\begin{cases} t\,(0\le t\le 4) \\ 4\,(4\le t\le 12) \\ 16-t\,(12\le t\le 16) \end{cases}$$

따라서 엘리베이터가 움직인 거리 s는

$$s=\int_{0}^{4}t\,dt+\int_{4}^{12}4\,dt+\int_{12}^{16}(16-t)dt=\mathbf{48(m)}$$

교과서 178 쪽

문제 1 수직선 위를 움직이는 어떤 물체의 시각 t에서의 속도가 $v(t)=t^2-3t+2$일 때, 다음을 구하여라. (단, $t=0$일 때의 물체의 위치는 1이다.)

(1) 시각 $t=2$에서의 물체의 위치

(2) 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 물체의 위치의 변화량

(3) 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 물체가 움직인 거리

예제 01 지면으로부터 20 m의 높이에서 49 m/s의 속도로 똑바로 쏘아 올린 로켓의 t초 후의 속도가 $v(t)=49-9.8t$(m/s)라고 할 때, 다음을 구하여라.

(1) 로켓을 발사하고 10초 후의 위치

(2) 로켓을 발사하고 10초 동안 움직인 거리

풀이 (1) 시각 $t=0$에서의 위치가 20 m이므로, 10초 후의 위치 x는

$$x=20+\int_{0}^{10}(49-9.8t)dt=20+\left[49t-4.9t^2\right]_0^{10}=20(\mathrm{m})$$

(2) $v(t)=49-9.8t=0$에서 $t=5$이므로 구간 $[0, 5]$에서 $v(t)\ge 0$이고, 구간 $[5, 10]$에서 $v(t)\le 0$이다. 따라서 움직인 거리 s는

$$s=\int_{0}^{10}|49-9.8t|dt=\int_{0}^{5}(49-9.8t)dt+\int_{5}^{10}(9.8t-49)dt$$

$$=\left[49t-4.9t^2\right]_0^5+\left[4.9t^2-49t\right]_5^{10}=245(\mathrm{m})$$

답 (1) 20 m (2) 245 m

문제 2 직선 궤도를 60 m/s의 속도로 달리는 열차에 제동을 걸면 t초 후의 속도가 $v(t)=60-3t$(m/s)라고 한다. 제동을 건 후 정지할 때까지 걸린 시간과 이때까지 열차가 움직인 거리를 구하여라.

사고력 기르기

추론
의사소통
▶문제 해결

엘리베이터를 타고 어느 건물의 1층에서 옥상까지 중간에 멈추지 않고 올라가는데 처음 4초 동안은 t m/s의 속도로, 다음 8초 동안은 4 m/s의 속도로, 그 다음 4초 동안은 $(16-t)$m/s의 속도로 올라가 옥상에서 정지하였다. 이 건물의 1층에서 옥상까지 엘리베이터가 움직인 거리를 구하여라.

지/도/자/료

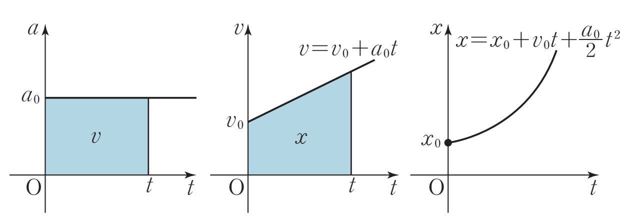
시각 t에서 위치가 x일 때, 속도 v와 가속도 a는

$$v=\frac{dx}{dt},\ a=\frac{dv}{dt}$$

따라서 x_0에서 출발한 물체의 처음 속도가 v_0이고 가속도가 a_0이라고 하면 이 물체의 시각 t에서의 속도 v와 위치 x는 다음과 같다.

$$v=v_0+\int_{0}^{t}a_0dt=v_0+a_0t$$

$$x=x_0+\int_{0}^{t}vdt=x_0+\int_{0}^{t}(v_0+a_0t)dt=x_0+v_0t+\frac{a_0}{2}t^2$$



교과서 179 쪽

중단원 기초

[해답 p.211]

수준별 학습

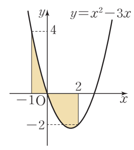
1 다음 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y=x^2-x-2$

(2) $y=x(x+1)(x+2)$

01 넓이
곡선과 x축 사이의 넓이

2 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=x^2-3x$와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.



01 넓이
곡선과 x축 사이의 넓이

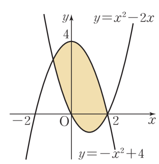
3 다음 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y=x^2-1$, $y=x+1$

(2) $y=x^3$, $y=x$

01 넓이
곡선과 직선 사이의 넓이

4 오른쪽 그림과 같이 두 곡선 $y=x^2-2x$, $y=-x^2+4$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.



01 넓이
두 곡선 사이의 넓이

5 수직선 위를 움직이는 물체의 시각 t에서의 속도가

$$v(t)=-t^2+4t-3$$

일 때, 다음을 구하여라.

(1) 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 물체의 위치의 변화량

(2) 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 물체가 움직인 거리

02 속도와 거리

중/단/원 기초

1

목표| 곡선과 x축 사이의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $(x-2)(x+1)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=2$

$$-\int_{-1}^{2}(x^2-x-2)dx$$
$$=-\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-1}^{2}$$
$$=-\left(-\frac{9}{2}\right)=\mathbf{\frac{9}{2}}$$

(2) $x(x+1)(x+2)=0$에서

$x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=0$

$$\int_{-2}^{-1}(x^3+3x^2+2x)dx-\int_{-1}^{0}(x^3+3x^2+2x)dx$$
$$=\left[\frac{x^4}{4}+x^3+x^2\right]_{-2}^{-1}-\left[\frac{x^4}{4}+x^3+x^2\right]_{-1}^{0}$$
$$=\left(\frac{1}{4}-0\right)-\left(0-\frac{1}{4}\right)=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

2

목표| 곡선과 x축 사이의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| $\displaystyle\int_{-1}^{0}(x^2-3x)dx-\int_{0}^{2}(x^2-3x)dx$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2\right]_{0}^{2}$$
$$=\left\{0-\left(-\frac{11}{6}\right)\right\}-\left\{\left(-\frac{10}{3}\right)-0\right\}=\mathbf{\frac{31}{6}}$$

3

목표| 곡선과 직선 사이의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $x^2-1=x+1$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

$$\int_{-1}^{2}\{(x+1)-(x^2-1)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx$$
$$=\frac{10}{3}-\left(-\frac{7}{6}\right)=\mathbf{\frac{9}{2}}$$

(2) $x^3=x$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

$$\int_{-1}^{0}(x^3-x)dx+\int_{0}^{1}(-x^3+x)dx$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

4

목표| 두 곡선 사이의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| $x^2-2x=-x^2+4$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

$$\int_{-1}^{2}\{(-x^2+4)-(x^2-2x)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)dx=\frac{20}{3}-\left(-\frac{7}{3}\right)=\mathbf{9}$$

5

목표| 수직선 위를 움직이는 물체의 속도와 거리를 구할 수 있게 한다.

풀이| (1) $\displaystyle\int_{0}^{2}(-t^2+4t-3)dt=\mathbf{-\frac{2}{3}}$

(2) $v(t)=-t^2+4t-3=-(t-1)(t-3)$

구간 $[0,\ 1]$에서 $v(t)\le 0$, 구간 $[1,\ 3]$에서 $v(t)\ge 0$이므로

$$\int_{0}^{1}(t^2-4t+3)dt+\int_{1}^{2}(-t^2+4t-3)dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_{0}^{1}+\left[-\frac{1}{3}t^3+2t^2-3t\right]_{1}^{2}=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=\mathbf{2}$$

교과서 180 쪽

중단원 기본

[해답 p.212]

수준별 학습

1 곡선 $y=x^3-(a+2)x^2+2ax\ (a>2)$와 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같을 때, 상수 a의 값을 구하여라.

01 넓이
곡선과 x축 사이의 넓이

2 다음 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y=x^2-4x+5$, $y=-x^2+6x-3$

(2) $y=x^3-x^2$, $y=x^2$

01 넓이
두 곡선 사이의 넓이

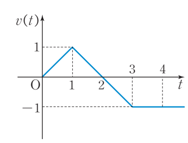
3 곡선 $y=x^2-2x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 직선 $y=mx$에 의하여 이등분될 때, $(m+2)^3$의 값을 구하여라.

01 넓이

4 함수 $f(x)=x^3-2x^2+2x$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

01 넓이

5 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 오른쪽 그림과 같이 주어졌을 때, 다음 설명 중에서 옳은 것을 모두 찾아라.



02 속도와 거리

ㄱ. $t=1$에서의 점 P의 위치는 1이다.
ㄴ. $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량은 1이다.
ㄷ. $t=1$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는 2이다.

중/단/원 기본

1

목표| 곡선과 x축 사이의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| $y=x(x-a)(x-2)\,(a>2)$에서

$x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=a$

곡선 $y=x^3+(a+2)x^3+2ax$와 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같으므로

$$\int_0^a \{x^3-(a+2)x^2+2ax\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{(a+2)}{3}x^3+ax^2\right]_0^a$$

$$=\frac{a^3(-a+4)}{12}=0$$

따라서 $\boldsymbol{a=4}$

2

목표| 두 곡선 사이의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이|

(1) $\displaystyle\int_1^4 \{(-x^2+6x-3)-(x^2-4x+5)\}dx$

$$=\int_1^4 (-2x^2+10x-8)dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+5x^2-8x\right]_1^4=\frac{16}{3}-\left(-\frac{11}{3}\right)=\boldsymbol{9}$$

(2) $\displaystyle\int_0^2 \{x^2-(x^3-x^2)\}dx=\int_0^2 (-x^3+2x^2)dx$

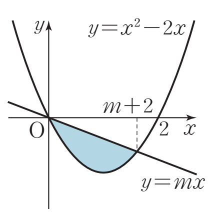
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_0^2=\left(-4+\frac{16}{3}\right)=\boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

3

목표| 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 곡선 $y=x^2-2x$와 직선 $y=mx$의 교점의 x좌표를 구하면

$x=0$ 또는 $x=m+2$



$\displaystyle\int_0^2 (-x^2+2x)dx=\frac{4}{3}$이므로

$\displaystyle\int_0^{m+2} (mx-x^2+2x)dx=\frac{2}{3}$에서

$$\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{(m+2)x^2}{2}\right]_0^{m+2}=\frac{2}{3},\ \frac{(m+2)^3}{6}=\frac{2}{3}$$

따라서 $(m+2)^3=\boldsymbol{4}$

4

목표| 두 곡선 사이의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 함수 $f(x)=x^3-2x^2+2x$의 역함수가 $g(x)$이므로 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 따라서

$$2\int_0^1 (x^3-2x^2+2x-x)dx=2\int_0^1 (x^3-2x^2+x)dx$$

$$=2\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}\right]_0^1=2\times\frac{1}{12}=\boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

5

목표| 수직선 위를 움직이는 물체의 속도와 거리를 구할 수 있게 한다.

풀이| ㄱ. $t=1$에서의 점 P의 위치는 $\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$이다.

ㄴ. $\displaystyle\int_1^3 v(t)dt=\frac{1}{2}\times1\times1-\frac{1}{2}\times1\times1=0$

ㄷ. $\displaystyle\int_1^4 v(t)dt=\int_1^2 v(t)dt-\int_2^3 v(t)dt-\int_3^4 1dt$

$$=\frac{1}{2}\times1\times1+\frac{1}{2}\times1\times1+1\times1=2$$

따라서 옳은 것은 **ㄷ**이다.

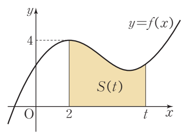
교과서 181 쪽

중단원 실력

[해답 p.212]

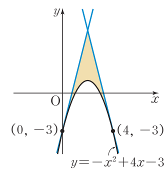
수준별 학습

1 오른쪽 그림과 같이 연속함수 $y=f(x)$의 그래프에서 색칠한 부분의 넓이를 $S(t)$라고 하자. $f(2)=4$일 때, $\lim_{h\to 0}\frac{S(2+h)-S(2)}{h}$의 값을 구하여라.



01 넓이

2 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=-x^2+4x-3$과 이 곡선 위의 두 점 $(0,\ -3)$, $(4,\ -3)$에서의 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.



01 넓이
곡선과 접선 사이의 넓이

3 곡선 $y=-x^2+1$과 이 곡선 위의 점 $(a,\ -a^2+1)$에서의 접선 및 두 직선 $x=0$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라고 할 때, S의 최솟값을 구하여라. (단, $0<a<1$)

01 넓이
넓이의 최대 · 최소

4 직선의 철로 위를 25 m/s의 속도로 달리던 열차의 기관사가 x m 앞에 있는 장애물을 발견하고 급제동을 걸었다. 제동을 걸기 시작하여 t초 후 열차의 속도가

$$v(t)=25-4t\,(\mathrm{m/s})$$

라고 할 때, 이 열차가 장애물과 부딪히지 않고 정지하기 위한 x값의 범위를 구하여라.

02 속도와 거리

중/단/원 실력

1

목표| 곡선과 x축 사이의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| $S'(t)=\frac{d}{dt}\int_2^t f(x)dx=f(t)$이므로

$$\lim_{h\to 0}\frac{S(2+h)-S(2)}{h}=S'(2)=f(2)=\mathbf{4}$$

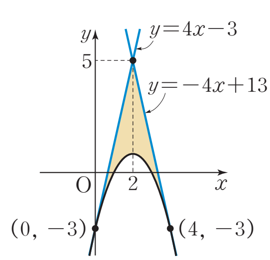
2

목표| 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| $(0,\ -3)$에서의 접선의 방정식은 $y=4x-3$

$(4,\ -3)$에서의 접선의 방정식은 $y=-4x+13$

따라서 두 접선의 교점은 $(2,\ 5)$



구하는 도형은 직선 $x=2$에 대해 대칭이므로 구하는 도형의 넓이는

$$2\int_0^2\{(4x-3)-(-x^2+4x-3)\}dx$$

$$=2\int_0^2 x^2dx=2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2=2\times\frac{8}{3}=\mathbf{\frac{16}{3}}$$

3

목표| 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이의 최솟값을 구할 수 있게 한다.

풀이| 곡선 $y=-x^2+1$ 위의 점 $(a,\ -a^2+1)$에서의 접선의 방정식은

$y=-2ax+a^2+1$

$$S=\int_0^1\{(-2ax+a^2+1)-(-x^2+1)\}dx$$

$$=\int_0^1(x^2-2ax+a^2)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-ax^2+a^2x\right]_0^1$$

$$=a^2-a+\frac{1}{3}$$

$$=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{12}$$

따라서 $a=\frac{1}{2}$일 때 S의 최솟값은 $\mathbf{\frac{1}{12}}$이다.

4

목표| 수직선 위를 움직이는 물체의 속도와 거리를 구할 수 있게 한다.

풀이| $v(t)=25-4t=0$에서 $t=\frac{25}{4}$이므로 $\frac{25}{4}$초 후 열차가 멈춘다.

구간 $\left[0,\ \frac{25}{4}\right]$에서 $v(t)\ge 0$이고, 이 구간 동안 열차가 움직인 거리는

$$\int_0^{\frac{25}{4}}v(t)dt=\int_0^{\frac{25}{4}}(25-4t)dt$$

$$=\left[25t-2t^2\right]_0^{\frac{25}{4}}$$

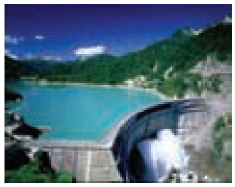
$$=\frac{625}{8}\,(\mathrm{m})$$

따라서 열차가 장애물과 부딪히지 않기 위한 x값의 범위는 $x>\mathbf{\frac{625}{8}}$

교과서 182 쪽

수행 과제

댐의 설계와 적분법



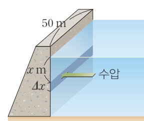
물을 가두고 있는 댐은 엄청난 수압을 받는다. 따라서 댐을 설계할 때에는 이 점을 중요하게 고려해야 한다.

수면으로부터의 깊이가 x m인 지점에서 댐에 수직으로 미치는 수압은 1 m^2당 x t, 즉 x t/m^2라고 한다. 이를테면 깊이가 10 m인 곳에서는 10 t/m^2의 압력을 받게 되는 것이다.

일반적으로 단위 넓이에 미치는 힘이 압력이므로 어떤 물체에 미치는 힘은 (압력)×(넓이)로 구할 수 있다.

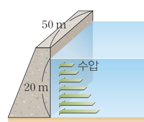
폭이 50 m인 댐에 20 m 높이까지 물이 찼을 때, 이 댐에 미치는 힘을 구하려고 한다. 다음 물음에 답하여 보자.

| 과 제 | **1** 오른쪽 그림과 같이 수면에서 깊이가 x m인 지점에서 $(x+\varDelta x)$ m인 지점까지의 넓이를 구하여 보자.



| 과 제 | **2** 과제 1에서 구한 넓이에 미치는 힘을 구하여 보자. (단, 수면에서 깊이가 x m인 지점에서 $(x+\varDelta x)$ m인 지점까지 댐에 수직으로 미치는 수압은 x t/m^2로 동일하다고 가정한다.)

| 과 제 | **3** 정적분을 이용하여 수면으로부터의 깊이가 20 m일 때, 이 댐에 미치는 힘을 구하여 보자.



교과서 183 쪽

대단원 학습 내용 정리

1 부정적분

부정적분

$F'(x)=f(x)$일 때,

$$\int f(x)dx=F(x)+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

실수배, 합, 차의 부정적분

(1) $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ (단, k는 상수)

(2) $\int \{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

(3) $\int \{f(x)-g(x)\}dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$

2 구분구적법

구분구적법

도형의 넓이나 부피를 여러 개의 간단한 도형으로 세분하여 그들의 넓이나 부피의 합의 극한값으로 구하는 방법

3 정적분

정적분의 정의

함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\varDelta x$$

$$\left(\varDelta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\varDelta x\right)$$

정적분과 미분의 관계

함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속일 때,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x) \text{ (단, } a<x<b)$$

미적분의 기본 정리

$f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $F'(x)=f(x)$라고 하면

$$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

4 정적분의 계산

정적분의 성질

임의의 실수 a, b, c를 포함하는 구간에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 연속일 때,

(1) $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$ (단, k는 실수)

(2) $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

(3) $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$

(4) $\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$

5 넓이

곡선과 x축 사이의 넓이

구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_a^b |f(x)|dx$$

두 곡선 사이의 넓이

구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

6 속도와 거리

점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라고 할 때

(1) 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_a^b v(t)dt$$

(2) 시각 $t=a$에서 $t=b$까지의 점 P가 실제로 움직인 거리 s는

$$s=\int_a^b |v(t)|dt$$

| 용어와 기호 | 부정적분, 적분상수, 구분구적법, 정적분, 미적분의 기본 정리, $\int f(x)dx$, $\int_a^b f(x)dx$, $\Big[F(x)\Big]_a^b$

수행 과제

● 수행 과제 의도

댐의 설계와 적분법을 통하여 적분이 다양한 분야에서 사용되고 있음을 이해할 수 있게 한다.

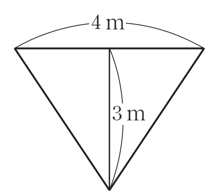
1. $\mathbf{50\varDelta x}$ $\mathbf{m^2}$

2. $\mathbf{50x\varDelta x}$ **t**

3. $50\times20\times20=\mathbf{10000}$

읽/기/자/료 댐과 적분

물을 가두고 있는 댐은 엄청난 수압을 받는다. 따라서 댐을 설계할 때는 이 점을 중요하게 고려해야 한다. 이를테면 수면으로부터 깊이가 x m인 지점에서 댐에 수직으로 미치는 수압은 1 m^2당 x t, 즉 x t/m^2이므로 깊이가 10 m인 곳에서는 1 m^2당 10 t의 압력을 받게 되는 것이다.



일반적으로 단위 넓이에 미치는 힘이 압력이므로 어떤 물체에 미치는 힘은 (압력)×(넓이)로 구할 수 있다. 이와 같은 힘을 구할 때 정적분이 사용된다.

예를 들어 오른쪽 그림과 같이 삼각형 모양의 수문을 가진 댐에 물이 가득 차 있을 때, 수문에 미치는 힘은 다음과 같다.

$$\int_0^3 x\left(4-\frac{4}{3}x\right)dx=6(\text{톤})$$

미적분학은 이러한 토목공학에서 뿐만 아니라 컴퓨터 단층 촬영 장치 등을 다루는 의공학 분야, 주식 가격의 분석 등을 하는 경제학 분야, 유물의 연대 측정 등을 하는 고고학 분야에 많이 쓰인다. 과학 기술의 발달에 공헌한 가장 큰 개념이 바로 미적분이다. BT(Bio Technology), NT(Nano Technology)도 작게 나눈 것을 바탕으로 생명 구조 또는 우주의 구조를 밝히려는 것이다. 따라서 미적분학은 인문계와 자연계를 막론하고 오늘날 고등학생들이 꼭 알아야 하는 기본교양이다.

교과서 184 쪽

대 / 단 / 원 평가 문제

Ⅳ. 다항함수의 적분법

선택형

1 함수 $f(x)$의 부정적분 중 하나가 $3x^4-2x+5$일 때, $f(0)$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

2 부정적분 $\int \frac{x^2}{x+1}dx+\int \frac{x}{x+1}dx$를 구하면? (단, C는 적분상수)

① $\frac{1}{2}x^2+C$
② $\frac{1}{2}x^2+x+C$
③ x^2+2x+C
④ $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+C$
⑤ $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+C$

3 함수 $f(x)$에 대하여 $\frac{d}{dx}\int xf(x)dx=x^3-2x$일 때, $f(3)$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

4 모든 실수 x에 대하여 $\int(2x-4)dx>0$이 성립하도록 하는 $\int(2x-4)dx$의 적분상수 C의 값이 될 수 있는 수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

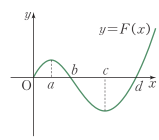
5 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^3=\frac{1}{2}\int_1^a x^3dx$일 때, 상수 a의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

6 연속함수 $f(x)$에 대하여
$\int_1^4 f(x)dx=A,\ \int_3^5 f(x)dx=B,\ \int_3^4 f(x)dx=C$
일 때, $\int_1^5 f(x)dx$를 A, B, C를 이용하여 바르게 나타낸 것은?

① $A+B+C$ ② $A-B+C$
③ $A+B-C$ ④ $B-A+C$
⑤ $A-B-C$

7 연속함수 $f(x)$에 대하여
$F(x)=\int_0^x f(t)dt$
일 때, $x\ge0$인 구간에서 $y=F(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 다음 중 옳은 것은?



① $f(a)>0$ ② $f(b)>0$ ③ $f(c)=0$
④ $f(d)<0$ ⑤ $f(0)<0$

8 $\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x|t-5|dt$의 값은?

① -3 ② -1 ③ 0
④ 4 ⑤ 5

대 / 단 / 원 평가 문제

1

목표 | 부정적분과 적분 사이의 관계를 이해하게 한다.

풀이 | 함수 $f(x)$의 부정적분 중 하나가 $3x^4-2x+5$이므로

$f(x)=(3x^4-2x+5)'=12x^3-2$

$f(0)=12\times0-2=-2$

답 ②

2

목표 | 부정적분을 구할 수 있게 한다.

풀이 | $\int\frac{x^2}{x+1}dx+\int\frac{x}{x+1}dx$

$=\int\frac{x^2+x}{x+1}dx=\int\frac{x(x+1)}{x+1}dx$

$=\int x\,dx=\frac{x^2}{2}+C$

답 ①

3

목표 | 도함수로 주어진 함수를 찾을 수 있게 한다.

풀이 | $\frac{d}{dx}\int xf(x)dx=x^3-2x$이므로

$xf(x)=x^3-2x$, $f(x)=x^2-2$

따라서 $f(3)=3^2-2=7$

답 ④

4

목표 | 적분의 성질을 이용하여 적분상수를 구할 수 있게 한다.

풀이 | 모든 실수 x에 대하여

$\int(2x-4)dx=x^2-4x+C>0$이 성립하므로

$x^2-4x+4-4+C=(x-2)^2-4+C>0$에서

$-4+C>0$이어야 한다.

즉, $C>4$이다.

답 ⑤

5

목표 | 정적분을 이용하여 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이 | $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^3$에서

$1+\frac{2k}{n}\to x$라고 하면 $\frac{2}{n}\to dx$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^3=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^3$$
$$=\frac{1}{2}\int_1^3 x^3dx$$

따라서 $a=3$

답 ②

6

목표 | 정적분의 성질을 이해하게 한다.

풀이 | $\int_1^5 f(x)dx$

$=\int_1^4 f(x)dx+\int_4^5 f(x)dx$

$=\int_1^4 f(x)dx+\left(\int_3^5 f(x)dx-\int_3^4 f(x)dx\right)$

$=A+B-C$

답 ③

7

목표| 미적분의 기본 정리를 이해하게 한다.

풀이| $F(x)=\int_0^x f(x)d$에서

$$\frac{d}{dx}F(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt=f(x)$$

이때 주어진 그래프의 모양에서 $f(x)$의 값의 변화를 알아보면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$	d
$F(x)$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0
$f(x)$	$+$	$+$	0 (극대)	$-$	$-$	$-$	0 (극소)	$+$	$+$

따라서 $f(a)=0$, $f(b)<0$, $f(d)>0$, $f(0)>0$이므로 옳은 것은 ③이다. **답** ③

8

목표| 미적분의 기본 성질을 이해하고 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $f(t)=|t-5|$라고 하면

$$F(x)=\int_1^x |t-5|dt$$

$$F(1)=\int_1^1 |t-5|dt=0$$이므로

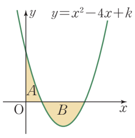
$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x |t-5|dt$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}|x-5|=4$$

답 ④

교과서 185 쪽

[해답 p.212]

9 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=x^2-4x+k$와 x축, y축으로 둘러싸인 두 도형 A, B의 넓이의 비가 $1:2$일 때, 상수 k의 값은?



① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ 2
④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

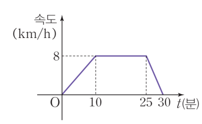
10 두 곡선 $y=2x^3-x^2-5x$, $y=-x^2+3x$로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

11 함수 $f(x)=x^3-x^2+x$의 역함수를 $g(x)$라고 할 때, $\int_1^2 f(x)dx+\int_1^6 g(x)dx$의 값은?

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

12 채연이는 하루에 30분씩 러닝머신 위에서 달리기를 한다. 다음 그림은 채연이가 달리는 러닝머신에 표시된 속도 그래프이다. 채연이가 러닝머신 위에서 달린 거리는?



① 2 km ② 3 km ③ 4 km
④ 5 km ⑤ 6 km

서답형

13 두 점 (0, 2)와 (1, 0)을 지나는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기가 x^3에 비례할 때, $f(x)$를 구하여라.

14 양의 정수 n에 대하여

$$a_n=\int_0^n 3x^2dx$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n^4}$의 값을 구하여라.

|서|술|형|

15 곡선 $y=x^3+1$과 이 곡선 위의 점 (1, 2)에서의 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하는 풀이 과정과 답을 서술하여라.

|서|술|형|

16 수직선 위에 좌표가 10인 점에서 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 t초 후의 속도가 $v(t)=8-4t$일 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 점 P의 운동 방향이 바뀌는 것은 몇 초 후인지 구하고, 이때 점 P의 좌표를 구하여라.
(2) 점 P가 출발하여 원점에 올 때까지의 걸리는 시간을 구하고, 이때 점 P가 움직인 거리를 구하여라.

9

목표| 정적분을 이용하여 도형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| $y=x^2-4x+k=(x-2)^2+k-4$이므로

곡선 $y=x^2-4x+k$는 $x=2$에 대하여 대칭이다.

따라서

$$\int_0^2(x^2-4x+k)dx=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+kx\right]_0^2$$
$$=-\frac{16}{3}+2k=0$$

이므로 $k=\frac{8}{3}$ **답** ⑤

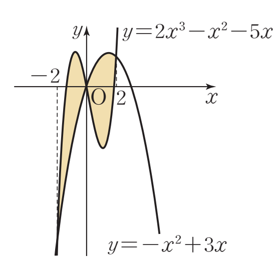
10

목표| 정적분을 이용하여 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| $2x^3-x^2-5x=-x^2+3x$에서 $x=0$ 또는 $x=\pm2$

따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-2}^0\{(2x^3-x^2-5x)-(-x^2+3x)\}dx$$
$$+\int_0^2\{(-x^2+3x)-(2x^3-x^2-5x)\}dx$$
$$=\left[\frac{x^4}{2}-4x^2\right]_{-2}^0+\left[4x^2-\frac{x^4}{2}\right]_0^2$$
$$=8+8=16$$



답 ④

11

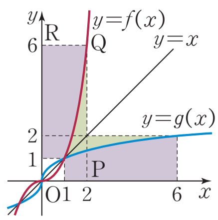
목표| 정적분을 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 함수 $f(x)=x^3-x^2+x$의 그래프와 역함수 $g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대칭이고

$f(1)=1,\ f(2)=6$

$g(1)=1,\ g(6)=2$

이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서

$$\int_1^2 f(x)dx+\int_1^6 g(x)dx$$

$=6\times2-1\times1=11$

답 ②

12

목표| 정적분을 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| 채연이가 런닝 머신에서 달린 거리는 주어진 그래프와 t축 사이의 넓이와 같으므로

$$\frac{1}{2}\times8\times\frac{10-0}{60}+8\times\frac{25-10}{60}+\frac{1}{2}\times8\times\frac{30-25}{60}$$

$$=\frac{1}{2}\times8\times\frac{1}{6}+8\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times8\times\frac{1}{12}$$

$$=\frac{2}{3}+2+\frac{1}{3}=3(\mathrm{km})$$

답 ②

13

목표| 도함수를 알 때, 원래의 함수를 구할 수 있게 한다.

풀이| 접선의 기울기가 x^3에 비례하므로

$f'(x)=ax^3$ (a는 상수)

$f(x)=\frac{1}{4}ax^4+C$ (단, C는 적분상수)

$f(x)$가 점 $(0,\ 2)$와 $(1,\ 0)$을 지나므로

$f(0)=C=2,\ f(1)=\frac{1}{4}a+C=0$

따라서 $a=-8,\ C=2$이고

$f(x)=-2x^4+2$

답 $f(x)=-2x^4+2$

14

목표| 정적분의 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있게 한다.

풀이| $a_n=\int_0^n 3x^2dx=n^3$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n^4}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n^4}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^4}=\int_0^1 x^3dx=\frac{1}{4}$$

답 $\frac{1}{4}$

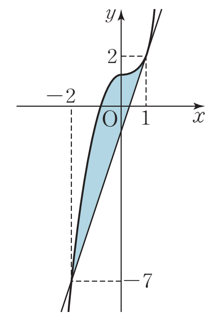
15

목표| 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 수 있게 한다.

풀이| 함수 $y=x^3+1$의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 3이고 접선의 방정식은

$y-2=3(x-1),\ y=3x-1$

곡선 $y=x^3+1$과 직선 $y=3x-1$은 $x=-2,\ x=1$에서 교점을 가진다.



따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_{-2}^{1}\{(x^3+1)-(3x-1)\}dx=\int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{1}=\frac{3}{4}-(-6)=\frac{27}{4}$$

답 $\frac{27}{4}$

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소	배점
해결 과정	곡선 $y=x^3+1$의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 방정식 구하기	20%
	곡선과 접선의 방정식이 만나는 교점 구하기	40%
	도형이 넓이 구하는 적분식 구하기	20%
답 구하기	도형의 넓이 구하기	20%

16

목표| 정적분을 활용하여 문제를 해결할 수 있게 한다.

풀이| (1) $v(t)=0$에서 $t=2$

따라서 점 P의 운동 방향이 바뀌는 것은 2초 후이고, 이때 점 P의 좌표는

$$10+\int_0^2(8-4t)dt=10+\left[8t-2t^2\right]_0^2=18\text{에서}\quad \mathrm{P}(18)$$

(2) t초 후의 점 P의 위치를 $s(t)$라고 하면

$$s(t)=10+\int_0^t(8-4t)dt=10+8t-2t^2$$

따라서 원점에 올 때까지 걸리는 시간은

$10+8t-2t^2=0,\ t^2-4t-5=0$에서 $t=5$

이때 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^5|8-4t|dt=\int_0^2(8-4t)dt+\int_2^5(4t-8)dt$$

$$=8+18=26$$

답 (1) P(18) (2) 26

채점 기준

영역 \ 요소	채점 요소	배점
해결 과정	(1) 점 P의 운동 방향이 바뀌는 시각 구하기	20%
답 구하기	(1) 점 P의 좌표 구하기	20%
해결 과정	(2) 점 P가 원점에 올 때까지의 걸리는 시간 구하기	30%
답 구하기	(2) 점 P가 움직인 거리 구하기	30%

교과서 186 쪽

M+ Real Life

수 학 ✚ 실 생 활

심장은 적분으로 뛴다.

요즘 우리나라 사람들의 화두는 단연 건강이다. 웰빙 바람과 함께 시작된 건강에 대한 관심이 높아지며 수많은 책들이 출간되고 있고, 각종 매스컴에서는 저마다 건강식품과 운동 방법을 소개하고 있다. 여기에 의료 수준의 향상으로 사람들의 평균 수명은 해를 거듭할수록 꾸준히 늘고 있다.

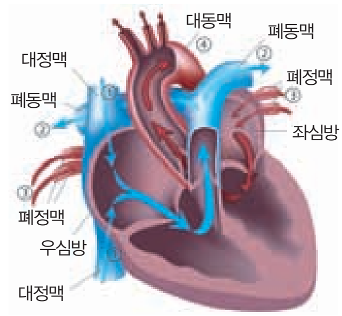
2012년 11월 14일 인구보건복지협회가 발간한 '유엔인구기금(UNFPA) 2012 세계 인구현황보고서 한국어판'에 따르면, 기대수명은 세계 평균이 남성 67.1세, 여성 71.6세로 집계되었다. 선진국의 경우 남녀가 각각 74.6세, 81.3세인 반면, 개발도상국은 65.6세, 69.4세로 나타나 선진국과 개발도상국 간 평균 기대수명의 차이가 남성은 9살, 여성은 12살가량 났다. 우리나라 남성의 평균 기대수명은 77.3세로 세계 26위, 여성은 84.0세로 세계 8위였다. 북한은 남성 65.9세와 여성 72.1세로 모두 117위였다. 남북한의 기대수명 차이는 약 11～12년이었다.

그렇다면 우리나라 사람들의 사망 원인 1위는 무엇일까?

최근 통계청은 '2011년 사망원인통계'에서 우리나라 총 사망자 수는 25만 7396명이며, 사망 통계를 작성한 이래 역대 최고치를 기록했다고 발표했다. 흔히 암이 가장 주된 사망 원인이라고 생각하고 있지만, 실제로는 뇌졸중, 동맥 경화, 심근 경색과 같은 혈관 질환이 우리나라 65세 이상의 고령 인구에서 사망 원인 1위의 질환이라고 한다. 이런 혈관 질환 대부분은 혈액이 어떤 저항 때문에 혈관을 따라 잘 흐르지 못하기 때문에 생기는 질환이다.

심장의 건강 상태를 알아보는 한 가지 방법은 단위 시간에 심장으로부터 뿜어져 나오는 혈액의 양인 심박출량을 측정하는 것이다.

혈액은 대정맥을 통해 몸으로부터 되돌아와서 심장의 우심방으로 들어가(①) 폐동맥을 거쳐(②) 폐로 들어가서 산소와 결합한다. 그리고 폐정맥을 거쳐 좌심방으로 들어가서(③) 대동맥을 통해 다시 몸 전체로 전달된다.(④)

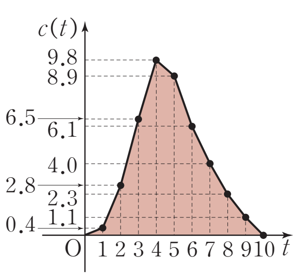


심박출량은 염료 희석법으로 측정하는데, 염료를 우심방으로 주입하면 심장을 거쳐 대동맥으로 들어간다. 대동맥으로 삽입된 탐침이 심장을 떠나는 염료의 농도를 염색약이 없어질 때까지 일정한 시간 간격으로 측정하여 염료의 농도를 구하고, 이를 이용하여 심박출량을 계산한다. 염료의 농도를 측정하는 시간 구간을 [0, T]라 하고 $c(t)$를 시각 t에서 염료의 농도라고 하면 심박출량 F는 다음과 같이 계산한다.

$$F=\frac{A}{\int_0^T c(t)dt} \quad (\text{단, } A\text{는 염료의 양})$$

예를 들어 5 mg의 염료를 우심방에 주입하여 염료의 농도를 L당 mg으로 대동맥에서 1초 간격으로 측정하여 다음 표를 얻었다고 하자. 이때 염료의 농도는 시간이 흐를수록 점점 진해지다가 다시 약해져서 나중에는 0이 될 것이다.

t(초)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$c(t)$(mg/L)	0	0.4	2.8	6.5	9.8	8.9	6.1	4.0	2.3	1.1	0



심박출량을 알기 위해서는 정적분 $\int_0^{10} c(t)dt$를 계산해야 하는데, 그 값은 왼쪽 그래프에서 색칠한 부분의 넓이로 어림잡아 생각할 수 있다. 따라서 $A=5$이고 색칠한 부분의 넓이는 약 41.87이므로 심장은 다음과 같이 1초당 약 120 mL의 혈액을 온몸에 공급하고 있음을 알 수 있다.

$$F=\frac{A}{\int_0^{10} c(t)dt}=\frac{5}{41.87}=0.12(\text{L/s})$$

우리가 적분을 모른다고 하더라도 우리의 혈액 순환 계통은 이미 수학적으로 매우 아름답게 설계되어 있다. 수학이 별로 소용되는 곳이 없는 학문이라고 생각하고 있는 그 순간에도 여러분의 뇌와 혈관 그리고 몸의 모든 조직들은 이미 수학을 이용하고 있다.

수 학 ✚ 실 생 활

● 수학 용어

용어	외국어	한자
〈ㄱ〉		
가정	hypothesis	假定
감소	decreasing	減少
거듭제곱근	radical root	
결론	conclusion	結論
(집합의) 결합법칙	associative law	結合法則
계수	coefficient	係數
계승	factorial	階乘
곱의 법칙	multiplication principle	
공간벡터	space vector	
공간좌표	coordinates in space	空間座標
공비	common ratio	公比
공역	codomain	共域
공집합	empty set	空集合
공차	common difference	公差
교선	line of intersection	交線
교집합	intersection	交集合
(집합의) 교환법칙	commutative law	交換法則
구간	interval	區間
구분구적법	quadrature by parts	區分求積法
귀납적 정의	inductive definition	歸納的定義
귀류법	reduction to absurdity	歸謬法
극값	extreme values	
극대	local maximum	極大
극댓값	local maximum	
극소	local minimum	極小
극솟값	local minimum	
극한(값)	limit (value)	極限
근	root	根
근의 공식	quadratic formula	根— 公式
근호	radical sign	根號
급수	series	級數
급수의 합	sum of series	級數— 合
기댓값	expected value	
기울기	slope	
〈ㄴ〉		
나머지정리	remainder theorem	
내분	internal division	內分

용어	외국어	한자
내적	inner product	內積
〈ㄷ〉		
다항식	polynomial	多項式
다항함수	polynomial function	多項函數
단위벡터	unit vector	
단항식	monomial	單項式
닫힌 구간	closed interval	
대우	contraposition	對偶
대응	correspondence	對應
대입	substitution	代入
대칭이동	reflection	對稱移動
덧셈정리	addition theorem	
도함수	derivatives	導函數
독립	independence	獨立
독립시행	independent trials	獨立試行
동경	radius	動徑
동류항	similar term	同類項
두 점 사이의 거리	distance between two points	
드모르간의 법칙	De Morgan's law	
등비급수	geometric series	等比級數
등비수열	geometric sequence	等比數列
등비중항	geometric means	等比中項
등차수열	arithmetic sequence	等差數列
등차중항	arithmetic means	等差中項
〈ㄹ〉		
라디안	radian	
로그	logarithm	
로그함수	logarithmic function	
롤의 정리	Rolle's theorem	
〈ㅁ〉		
매개변수	parameter	媒介變數
명제	proposition	命題
모분산	population variance	母分散
모비율	population ratio	母比率
모집단	population	母集團
모평균	population mean	母平均
모표준편차	population standard deviation	母標準偏差
무리수	irrational number	無理數

용어	외국어	한자
무리식	irrational expression	無理式
무리함수	irrational function	無理函數
무한대	infinity	無限大
미분가능	differentiable	微分可能
미분계수	derivative	微分係數
미적분의 기본 정리	fundamental theorem of calculus	微積分－基本定理
미정계수법	method of undetermined coefficients	未定係數法
미지수	unknown	未知數
(로그의) 밑	base	
〈ㅂ〉		
반닫힌(반열린) 구간	half closed(open) interval	
발산	divergence	發散
방향벡터	direction vector	
배반사건	exclusive events	排反事件
법선벡터	normal vector	
벡터	vector	
벡터의 성분	component of vector	
벡터의 크기	norm of vector	
벤 다이어그램	Venn diagram	
변곡점	point of inflection	變曲點
복소수	complex number	複素數
부등식	inequality	不等式
부분적분법	integration by parts	部分積分法
부분집합	subset	部分集合
부분합	partial sum	部分合
부정	negation	否定
부정적분	indefinite integral	不定積分
분모의 유리화	rationalization of denominator	分母— 有理化
(집합의) 분배법칙	distributive law	分配法則
불연속	discontinuous	不連續
〈ㅅ〉		
사이값 정리	intermediate value theorem	
사인	sine	
사인함수	sine function	
삼각비	trigonometric ratio	三角比
삼각함수	trigonometric function	三角函數
삼수선의 정리	theorem of three perpendiculars	三垂線— 定理
상수함수	constant function	常數函數

용어	외국어	한자
상수항	constant term	常數項
상용로그	common logarithm	
(집합의) 서로소	disjoint	
수렴	convergence	收斂
수열	sequence	數列
수학적 귀납법	mathematical induction	數學的歸納法
수학적 확률	mathematical probability	數學的確率
순간변화율	instantaneous rate of change	瞬間變化率
순서쌍	ordered pair	順序雙
순열	permutation	順列
시점	initial point	始點
시초선	ray	始初線
시행	trial	試行
식의 값	numerical value of expression	
신뢰구간	confidence interval	信賴區間
신뢰도	confidence coefficient	信賴度
실근	real root	實根
실수	real number	實數
실수배	real number multiple	實數倍
실수부분	real part	實數部分
쌍곡선	hyperbola	雙曲線
쌍곡선의 꼭짓점	vertex of hyperbola	
쌍곡선의 점근선	asymptotic line of hyperbola	雙曲線— 漸近線
쌍곡선의 주축	principal axis of hyperbola	雙曲線— 主軸
쌍곡선의 중심	center of hyperbola	雙曲線— 中心
쌍곡선의 초점	focus of hyperbola	雙曲線— 焦點
〈ㅇ〉		
x절편	x-intercept	
x좌표	x-coordinate	
x축	x-axis	
여사건	complementary event	餘事件
여집합	complement	餘集合
역	converse	逆
역함수	inverse function	逆函數
연립일차방정식	simultaneous linear equations	聯立一次方程式
연립일차부등식	simultaneous linear inequalities	聯立一次不等式
연속	continuous	連續
연속함수	continuous function	連續函數

용어	외국어	한자
연속확률변수	continuous random variable	連續確率變數
열린 구간	open interval	
영벡터	zero vector	
y절편	y-intercept	
y좌표	y-coordinate	
y축	y-axis	
완전제곱식	perfect square(expression)	
외분	external division	外分
우극한	right-handed limit	右極限
원소	element	元素
원순열	circular permutation	圓順列
원점	origin	原點
위치벡터	position vector	
유리식	rational expression	有理式
유리함수	rational function	有理函數
음함수	implicit function	陰函數
이계도함수	second order derivatives	二階導函數
이면각	dihedral angle	二面角
이면각의 면	faces of a dihedral angle	二面角― 面
이면각의 변	edge of dihedral angle	二面角― 邊
이면각의 크기	measure of a dihedral angle	
이산확률변수	discrete random variable	離散確率變數
이차곡선	quadratic curve	二次曲線
이차방정식	quadratic equation	二次方程式
이차함수	quadratic function	二次函數
이항	transposition	移項
이항계수	binomial coefficient	二項係數
이항분포	binomial distribution	二項分布
이항정리	binomial theorem	二項定理
인수	factor	因數
인수분해	factorization	因數分解
인수정리	factor theorem	因數定理
일대일 대응	one to one correspondence	一對一對應
일대일함수	one to one function	一對一函數
일반각	general angle	一般角
일반항	general term	一般項
일차방정식	linear equation	一次方程式
일차부등식	linear inequality	一次不等式

용어	외국어	한자
일차함수	linear function	一次函數
임의추출	random sampling	任意抽出
〈ㅈ〉		
자연로그	natural logarithm	
자연수의 분할	partitions of natural number	自然數― 分割
적분상수	integral constant	積分常數
전개	expansion	展開
전개식	expansion	展開式
전수조사	total inspection	全數調査
전체집합	universal set	全體集合
절대부등식	absolute inequality	絕對不等式
정규분포	normal distribution	正規分布
정리	theorem	定理
정사영	orthogonal projection	正射影
정의	definition	定義
정의역	domain	定義域
정적분	definite integral	定積分
제곱근	square root	
조건	condition	條件
조건부확률	conditional probability	條件附確率
조립제법	synthetic division	組立除法
조합	combination	組合
종속	dependence	從屬
종점	terminal point	終點
좌극한	left-handed limit	左極限
좌표	coordinate	座標
좌표공간	coordinate space	座標空間
좌표축	coordinate axis	座標軸
좌표평면	coordinate plane	座標平面
주기	period	週期
주기함수	periodic function	週期函數
중근	multiple root	重根
중복순열	repeated permutation	重複順列
중복조합	repeated combination	重複組合
중점	midpoint	中點
증가	increasing	增加
증명	proof	證明
증분	increment	增分

용어	외국어	한자
지수함수	exponential function	指數函數
진리집합	truth set	眞理集合
진부분집합	proper subset	眞部分集合
진수	antilogarithm	眞數
집합	set	集合
집합의 분할	partition of a set	集合—分割
〈ㅊ〉		
차수	degree	次數
차집합	difference set	差集合
최대 · 최소 정리	maximum−minimum theorem	最大最小定理
최댓값	absolute maximum	最大
최솟값	absolute minimum	最小
추정	estimation	推定
충분조건	sufficient condition	充分條件
치역	range	値域
치환적분법	integration by substitution	置換積分法
〈ㅋ〉		
켤레복소수	complex conjugates	
코사인	cosine	
코사인함수	cosine function	
큰 수의 법칙	law of large numbers	
〈ㅌ〉		
타원	ellipse	橢圓
타원의 꼭짓점	vertex of ellipse	
타원의 단축	minor axis of ellipse	橢圓— 短軸
타원의 장축	major axis of ellipse	橢圓— 長軸
타원의 중심	center of ellipse	橢圓— 中心
타원의 초점	focal point of ellipse	橢圓— 焦點
탄젠트	tangent	
탄젠트함수	tangent function	
통계적 확률	statistical probability	統計的 確率
〈ㅍ〉		
파스칼의 삼각형	Pascal’s triangle	
판별식	discriminant	判別式
평균값 정리	mean value theorem	
평균변화율	mean rate of change	平均變化率
평면벡터	plane vector	
평행이동	translation	平行移動
포물선	parabola	抛物線
포물선의 꼭짓점	vertex of parabola	
포물선의 준선	directrix of parabola	抛物線— 準線
포물선의 초점	focal point of parabola	抛物線— 焦點
포물선의 축	axis of parabola	抛物線— 軸
표본	sample	標本
표본분산	sample variance	標本分散
표본비율	sample rate	標本比率
표본조사	sample survey	標本調査
표본평균	sample mean	標本平均
표본표준편차	sample standard deviation	標本標準偏差
표준정규분포	standard normal distribution	標準正規分布
표준화	standardization	標準化
피타고라스 정리	Pythagorean theorem	
필요조건	necessary condition	必要條件
필요충분조건	necessary and sufficient condition	必要充分條件
〈ㅎ〉		
함수의 그래프	graph of a function	
합성함수	composite function	合成函數
합의 법칙	addition principle	
합집합	union	合集合
항	term	項
항등식	identity	恒等式
항등함수	identity function	恒等函數
해	root	解
허근	imaginary root	虛根
허수	imaginary number	虛數
허수단위	imaginary unit	虛數單位
허수부분	imaginary part	虛數部分
호도법	circular measure	弧度法
확률밀도함수	probability density function	確率密度函數
확률변수	random variable	確率變數
확률분포	probability distribution	確率分布
확률질량함수	probability mass function	確率質量函數

집필진 소개

신항균
현 서울교육대학교 총장

이광연
현 한서대학교 교수

박세원
현 신경대학교 교수

신범영
현 청담중학교 교감

이계세
현 경기도학생교육원 교육연구사

김정화
현 서울고등학교 교사

박문환
현 인천인제고등학교 교사

윤정호
현 대구과학고등학교 교사

박상의
현 장충고등학교 교사

서원호
현 청원고등학교 교감

전제동
현 창원중앙고등학교 교사

이동흔
현 숭문고등학교 교사

만든 사람들
개발 책임 김경수
편집 윤준원, 최윤정
아트 디렉터 허영인
표지 디자인 김의수
본문 디자인 유지인
컷 김상준, 이도훈
조제판 벽호미디어

고등학교 미적분 I 교사용 지도서

2015. 3. 1. 초판 발행 정가 원

지은이 신항균 외 11인
발행인 (주)지학사 서울시 마포구 신촌로6길 5
인쇄인 (주)벽호 경기도 파주시 한빛로 43
내용 관련 문의 (주)지학사 콘텐츠본부 수학팀 전화 02-330-5440 전송 02-325-8009
구입 관련 문의 (주)지학사 영업본부 영업관리팀 전화 02-330-5302 전송 02-325-8010
공급 업무 대행 사단법인 한국검인정교과서 경기도 파주시 조리읍 당재봉로 29-28
개별 구입 안내 누리집 주소 www.ktbook.com 전화 031-8071-7981~4 (사)한국검인정교과서
ISBN 978-89-05-04257-8 53410

이 교사용 지도서의 본문 용지는 우수 재활용 제품 인증을 받은 재활용 종이를 사용했습니다.
교사용 지도서에 대한 문의 사항이나 의견이 있는 분은 한국교과서연구재단이 운영하는 **교과서민원바로처리센터**(전화 1566-8572, 누리집 주소 http://www.textbook114.com 또는 http://www.교과서114.com)에 문의하여 주시기 바랍니다.

고등학교 미적분 I

53410

9 788905 042578

ISBN 978-89-05-04257-8